Institute of Economic Studies, Faculty of Social Sciences
Charles University in Prague

Volební systémy pro volby do Poslanecké sněmovny Parlamentu ČR založené na matematickém programování

Pavel Doležel

IES Working Paper: 31/2011

Institute of Economic Studies,
Faculty of Social Sciences,
Charles University in Prague

[UK FSV – IES]

Opletalova 26
CZ-110 00, Prague
E-mail : ies@fsv.cuni.cz
http://ies.fsv.cuni.cz

Institut ekonomických studií
Fakulta sociálních věd
Univerzita Karlova v Praze

Opletalova 26
110 00 Praha 1

E-mail : ies@fsv.cuni.cz
http://ies.fsv.cuni.cz

Bibliographic information:
Doležel, P. (2011). "Volební systémy pro volby do Poslanecké sněmovny Parlamentu ČR založené na matematickém programování" IES Working Paper 31/2011. IES FSV. Charles University.

Volební systémy pro volby do Poslanecké sněmovny Parlamentu ČR založené na matematickém programování

Pavel Doležel*

*IES, Charles University Prague
E-mail: paveldolezel@email.cz

September 2011

Abstract:
V článku navrhujeme tři metody přepočtu hlasů na mandáty pro volby do Poslanecké sněmovny Parlamentu ČR (PS PČR) založené na metodách matematického programování. Důvod pro jejich zavedení spatřujeme v tom, že běžně používané metody přepočtu hlasů na mandáty často vedou k podstatným odchylkám od dokonalé proporcionality a to nad rámec, který je dán uzavírací klauzulí. Ztráta proporcionality je přímým důsledkem nejen nutnosti alokovat politickým subjektům celé mandáty a nikoliv jejich části, ale také rozdělení voleb do volebních obvodů, v nichž probíhá přepočet hlasů na mandáty samostatně.

Keywords: disproporcionalita, volební systém, uzavírací klauzule, volební obvod, Poslanecká sněmovna, celočíselné programování

JEL: D71, D72

Acknowledgements
Text vznikl za podpory grantu GAČR č. 402/09/1066: "Political economy of voting behavior, rational voters' theory and models of strategic voting."

1 Úvod a motivace

Pro přepočet hlasů odevzdaných ve volbách do Poslanecké sněmovny Parlamentu České republiky (dále jen PS PČR) jednotlivým kandidujícím politickým subjektům na poslanecké mandáty, se dnes používá volební systém, který je dán volebním zákonem (zákon 247/1995 Sb.). Teorie volebních systémů zná celou řadu jiných způsobů přepočtu hlasů na mandáty, viz. například [Leb09]. Algoritmus, který každému kandidujícímu politickému uskupení přiřadí poslanecké mandáty na základě počtu hlasů, které získalo ve volbách, budeme v tomto textu nazývat metodou přepočtu hlasů na mandáty, nebo také volebním systémem.

Jednou z nejdůležitějších vlastností volebních systémů je tzv. míra proporcionality, která udává jak moc je rozdělení voličských hlasů pro jednotlivé politické subjekty v populaci voličů (kteří platně odevzdali svůj hlas) odlišné od finálního rozdělení mandátů mezi tyto subjekty. Vymezení proporcionality a popis jejího významu pro studium volebních systémů je možné najít například v publikaci [Leb09]. Tomáš Lebeda ve své studii [Leb06] dokonce uvádí: "Míra proporcionality je hlavním a nejdůležitějším kvantifikovatelným jevem, který vypovídá o politických konsekvencích volebního systému. Je ukazatelem zkreslení reprezentace – ukazuje na nadreprezentaci, podreprezentaci či nereprezentaci jednotlivých stran – a značně determinuje podobu stranického systému."V této studii autor popisuje i snahu jiných autorů o setřídění volebních systémů podle míry proporcionality.

Částečně v opozici k proporcionalitě stojí tzv. efektivita volebního systému (viz. kupříkladu [Col71]). Ta vyjadřuje schopnost volebního systému produkovat změny statu quo. V případě PS PČR efektivita vyjadřuje pravděpodobnost vytvoření stabilní a silné vlády. Je zřejmé, že efektivita a proporcionalita jdou často proti sobě, protože vysoká míra proporcionality většinou vede k tomu, že mandáty získá velké množství vzájemně nesourodých a nekompatibilních politických subjektů, které se obtížně dokáží dohodnout na účasti ve společné vládní koalici a když už se dohodnou, bývají takové koalice spíše nestabilní. Pro dosažení rozumné míry efektivity se používají mimojiné tzv. uzavírací klauzule, které umožňují (nikoliv zaručují) zisk mandátu pouze těm stranám, které na celostátní úrovni dosáhnou alespoň nějakého předem pevně daného podílu počtu platných hlasů. Ve volbách do PS PČR je uzavírací klauzule na úrovni 5%.

Další velmi důležitou vlastností voleb do PS PČR je jejich rozdělení do volebních obvodů, přičemž podle stávajícího volebního systému se nejprve aplikuje uzavírací klauzule na celostátní úrovni, poté probíhá přepočet mandátů na tyto obvody a teprve poté v každém obvodu zvlášť probíhá přepočet mandátů na jednotlivé kandidující politické subjekty. Důvodů pro zavedení volebních obvodů je hned několik. Jednak umožňují provázanost konkrétních mandátů s konkrétními menšími územními celky, jednak vedou ke spravedlivější územní distribuci mandátů a jednak také usnadňují a zlevňují volební kampaně. Bez zavedení volebních obvodů by mohlo dojít k situaci, kdy by drtivá většina poslanců byla z několika velkých měst a proto jejich ochota zabývat se regionálními problémy by byla nízká. Volební obvody se používají ve volbách běžně v celém světě a navíc hrají svoji nezastupitelnou úlohu ve volbách do nadnárodních institucí, jako je Evropská Unie, nebo i do federálních institucí, jako je kupříkladu House of Representatives ve Spojených státech. V těchto institucích je prakticky nemyslitelné ideu volebních obvodů úplně opustit a to nejen z historických důvodů.

Smíříme-li se s uzavírací klauzulí jakožto mechanismem omezujícím neefektivitu volebního systému a smíříme-li se i s rozdělením voleb do jednotlivých volebních obvodů, v nichž probíhá přepočet hlasů na mandáty odděleně, vzniká otázka, zda použitá metoda přepočtu hlasů na mandáty v jednotlivých volebních obvodech nevytváří sama o sobě dodatečné odchýlení od dokonalé proporcionality. A právě toto dodatečné odchýlení se budeme snažit minimalizovat zavedením nových způsobů přepočtu hlasů na mandáty, které využívají metod matematického programování. Účelem těchto návrhů je minimalizovat odchýlení od dokonalé proporcionality při rozdělení na volební obvody a při nenulové uzavírací klauzuli. Výhodou těchto návrhů je jejich obecná použitelnost (lze je prakticky pouze se změnou parametrů aplikovat okamžitě i na jiné volby využívající volební obvody, než jsou volby do PS PČR). Nevýhodou těchto návrhů je jejich relativní technická náročnost a nutnost použití počítače. Veškeré algoritmy, které jsme v práci použili jsou zapsány v jazyku VBA (Visual Basic for Applications) a vytvořili jsme je sami v programu Microsoft®Excel.

Nyní zaveďme základní značení, které budeme v práci používat. Počet všech platných hlasů odevzdaných ve volbách označme v' a počet všech obsazovaných mandátů označme m (v případě voleb do PS PČR je $m = 200$). Předpokládáme, že $m < v'$. Označme P' počet všech ve volbách kandidujících politických subjektů a R počet všech volebních obvodů (v případě voleb do PS PČR od roku 2002 jsou volebními obvody samosprávné kraje a tedy $R = 14$, v případě voleb do České národní rady a voleb do PS PČR do roku 1998 je volebních obvodů osm, tedy $R = 8$). Množinu všech kandidujících politických subjektů označme $\mathcal{P}'$ a tuto množinu pevně uspořádejme sestupně podle počtu obdržených hlasů tak, že indexem $i' \in \{1, \ldots, P'\}$ bude pevně označen právě jeden z kandidujících politických subjektů. Označme $p'_{i'}$ počet platných odevzdaných hlasů pro politický subjekt i' a to pro všechna $i' = 1, \ldots, P'$. Množinu všech volebních obvodů pevně uspořádáme sestupně podle počtu odevzdaných platných hlasů tak, že indexem $j \in \{1, \ldots, R\}$ je pevně označen právě jeden volební obvod. Počet platných hlasů odevzdaných straně i' ve volebním obvodu j označme $v'_{i'j}$, pro všechna $i' = 1, \ldots, P'$ a všechna $j = 1, \ldots, R$. Uzavírací klauzuli označme $0 < u < 1$.

2 Míry disproporcionality

Protože naší hlavní motivací je minimalizovat v nějakém smyslu odchýlení od dokonalé proporcionality, musíme nejprve definovat míry tohoto odchýlení. S jejich pomocí budeme navržené systémy porovnávat s ostatními metodami přepočtu hlasů na mandáty.

Míru odchýlení konkrétního výsledku voleb od teoretického výsledku při dokonalé proporcionalitě budeme měřit prostřednictvím tří základních měr: (1), (2) a (3).

$$\rho = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{R} \left(m_{ij} - \frac{m}{v} v_{ij} \right)^2, \tag{1}$$

$$\phi = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{R} \left| m_{ij} - \frac{m}{v} v_{ij} \right|, \tag{2}$$

$$\xi = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{R} \frac{\left(m_{ij} - \frac{m}{v} v_{ij} \right)^2}{\frac{m}{v} v_{ij}}, \tag{3}$$

kde m je celkový počet mandátů, v je celkový počet platných hlasů odevzdaných politickým subjektům, P je počet kandidujících politických subjektů, R je počet volebních obvodů, m_{ij} je počet mandátů alokovaných politickému subjektu i ve volebním obvodu j a v_{ij} je počet platných hlasů pro politický subjekt i odevzdaných ve volebním obvodu j.[1] Míry ρ, ϕ a ξ jsou formálně funkcemi dvou matic - matice počtů mandátů získaných jednotlivými stranami v jednotlivých volebních obvodech M a matice počtu hlasů získaných jednotlivými stranami v jednotlivých volebních obvodech V.

Budeme-li měřit odchýlení vektoru mandátů alokovaných politickým subjektům na celostátní úrovni, resp. volebním obvodům přes všechny politické subjekty, které prošly přes uzavírací klauzuli, od dokonalé proporcionality pomocí tří navržených měr, položíme v jejich definici jednoduše $R = 1$, resp. $P = 1$.

Uvedené míry jsou často používanými mírami disproporcionality, ale ani zdaleka ne jedinými. Míra ρ je rostoucí transformací tzv. Gallagherova indexu, viz. [Gal91], míra ψ je rostoucí transformací tzv. Loosemore-Hanbyho

[1] Protože předmětem našeho zkoumání není nastavení uzavírací klauzule, nebudeme disproporcionalitu měřit u všech kandidujících subjektů, ale jen u těch, které prošly přes uzavírací klauzuli. Proto je značení uzpůsobeno značení, které zavádíme později pro politické subjekty, které prošly přes uzavírací klauzuli. Porovnání volebních systémů z hlediska míry disproporcionality při stejné uzavírací klauzuli tím není dotčeno, neboť subjekty, které neprošly přes uzavírací klauzuli, nemají alokován žádný mandát a tedy "jejich přínos" do celkové míry disproporcionality je pro všechny volební systémy se stejnou uzavírací klauzulí stejný.

indexu, viz. [JL71] a míra ξ je rostoucí transformací tzv. Sainte-Laguë indexu, viz. [Kar08]. Měr proporcionality je definována celá řada[2]. Jak je uvedeno v článku [Gal91], každá metoda přepočtu hlasů na mandáty minimalizuje disproporcionalitu vzhledem k nějaké míře, kterou si sama volí. Není tedy možné prohlásit jednu metodu přepočtu hlasů na mandáty za obecně nejlepší z pohledu proporcionality, protože způsob ověření podléhá normativnímu výběru její míry. Přesto existují články zabývající se porovnáváním jednotlivých metod z hlediska proporcionality mezi sebou, viz. kupříkladu [Ben00], [Pen98], [Leb09]. V tomto článku nám ale nejde o to, najít nejlepší míru disproporcionality, nýbrž o to, jak za předpokladu, že již byla zvolena, zajistit minimální disproporcionalitu u voleb rozdělených do volebních obvodů a obsahujících nenulovou uzavírací klauzuli. To je oblast, která v nám známé odborné literatuře zatím chybí. Navíc z našich výsledků je zřejmé, že námi navrhované metody často dosahují "proporčnějších"výsledků než ostatní volební systémy z hlediska všech tří zavedených měr disproporcionality.

3 Obecné předpoklady použitelnosti algoritmů pro přepočet hlasů na mandáty

Aby volební systém mohl být použit ve skutečných volbách, považujeme za nutné, aby splňoval následující tři vlastnosti:

1. Determinismus - aby byl deterministický, tj. aby neobsahoval prvky náhody a tudíž aby při opětovné aplikaci na stejné volby dal vždy tentýž výsledek.

2. Nezápornost řešení - aby vždy dospěl k takové alokaci, která žádnému z kandidujících subjektů v žádném z volebních obvodů nealokuje záporný počet mandátů.

3. Rychlost - aby vždy dospěl k řešení v rozumném, tj. polynomiálním čase.

Samotným navržením volebního systému tedy naše úsilí nekončí. Musíme také ověřit, zda každý z navrhovaných algoritmů má všechny tyto tři vlastnosti. Pokud ne, nemůže být v praxi použit.

[2] Raeův index, Monroeův index, Giniho index, Farina index, Borooahův index, Grofmanův index, Lijphartův index, Gatevův index, Ryabtsevův index, Szalaiův index, Aleskerov-Platonovův index, Atkinsonův index, index zobecněné entropie a d'Hondtův index jsou uvedeny v článku [Kar08], kde jsou také popsány jejich základní vlastnosti. Měření proporcionality je podrobeno detailnímu zkoumání v knize [dCMP+87].

4 Alokační algoritmus Ψ

4.1 Popis algoritmu

Ve všech zaváděných metodách přepočtu hlasů na mandáty popsaných v dalších částech textu, budeme využívat alokačního algoritmu, který vede k přiřazení počtu mandátů jednotlivým volebním obvodům, resp. jednotlivým kandidujícím politickým subjektům, které prošly přes uzavírací klauzuli. Tento algoritmus vede k řešení následující úlohy celočíselného programování v případě měření disproporcionality pomocí míry ρ:

$$\begin{aligned} & \min_{m_i,\ i=1,\dots,P} && \textstyle\sum_{i=1}^{P} \left(m_i - \frac{m}{v} p_i\right)^2 \\ & \text{za podmínek} && \textstyle\sum_{i=1}^{P} m_i = m \\ & && m_i \in \mathbb{N}_0 \qquad i = 1, \dots, P, \end{aligned} \tag{4}$$

kde P je počet kandidujících politických subjektů, které prošly přes uzavírací klauzuli, p_i je celkový počet odevzdaných platných hlasů pro kandidující politický subjekt i, který prošel přes uzavírací klauzuli, v je celkový počet platných odevzdaných hlasů ve volbách pro politické subjekty, které prošly přes uzavírací klauzuli a m je celkový počet mandátů. Obdobně algoritmus Ψ použijeme i na úlohu

$$\begin{aligned} & \min_{m_j,\ j=1,\dots,R} && \textstyle\sum_{j=1}^{R} \left(m_j - \frac{m}{v} r_j\right)^2 \\ & \text{za podmínek} && \textstyle\sum_{j=1}^{R} m_j = m \\ & && m_j \in \mathbb{N}_0 \qquad j = 1, \dots, R, \end{aligned} \tag{5}$$

kde R je počet volebních obvodů, r_j je celkový počet platných hlasů odevzdaných ve volebním obvodu j politickým subjektům, které prošly přes uzavírací klauzuli, v je celkový počet platných odevzdaných hlasů politickým subjektům, které prošly přes uzavírací klauzuli a m je celkový počet mandátů.

Obě úlohy (4) i (5) mají vždy optimální řešení, které je nezáporné i s podmínkou $m_i \in \mathbb{Z}$ místo podmínky $m_i \in \mathbb{N}_0$, protože $m > 0$.

V případě měření disproporcionality pomocí míry ψ máme tytéž úlohy, ale s účelovou funkcí

$$\sum_{i=1}^{P} \left| m_i - \frac{m}{v} p_i \right|,$$

resp.

$$\sum_{j=1}^{R} \left| m_j - \frac{m}{v} r_j \right|$$

a v případě měření disproporcionality pomocí míry ξ s účelovou funkcí

$$\sum_{i=1}^{P} \frac{\left(m_i - \frac{m}{v} p_i\right)^2}{\frac{m}{v} p_i},$$

resp.

$$\sum_{j=1}^{R} \frac{\left(m_j - \frac{m}{v} r_j\right)^2}{\frac{m}{v} r_j}.$$

Nechť $Q \in \mathbb{N}$. Alokační algoritmus Ψ má následující kroky:

1. Přiřadíme $m_i := m$ pro všechna $i = 1, \ldots, Q$.

2. Pro každé $i = 1, \ldots, Q$ spočítáme

$$\begin{array}{ll} \left(m_i - \frac{m}{v} v_i\right)^2, & \text{při minimalizaci míry } \rho \\ \left|m_i - \frac{m}{v} v_i\right|, & \text{při minimalizaci míry } \psi \\ \frac{\left(m_i - \frac{m}{v} v_i\right)^2}{\frac{m}{v} v_i}, & \text{při minimalizaci míry } \xi. \end{array}$$

3. Ze všech hodnot získaných v kroku 2 takových, že $m_i > m\frac{v_i}{v}$ najdeme argument maxima, tj. najdeme nejmenší index i^*, pro který platí

$$\left(m_{i^*} - m\frac{v_{i^*}}{v}\right)^2 \geq \left(m_i - m\frac{v_i}{v}\right)^2,$$

   pro všechna $i = 1, \ldots, Q$ při minimalizaci míry ρ,

$$\left|m_{i^*} - m\frac{v_{i^*}}{v}\right| \geq \left|m_i - m\frac{v_i}{v}\right|,$$

   pro všechna $i = 1, \ldots, Q$ při minimalizaci míry ψ a

$$\frac{\left(m_{i^*} - \frac{1}{2}\right)}{v_{i^*}} \geq \frac{\left(m_i - \frac{1}{2}\right)}{v_i},$$

   pro všechna $i = 1, \ldots, Q$ při minimalizaci míry ξ.

4. Položíme $m_{i^*} := m_{i^*} - 1$.

5. Pokud $\sum_{i=1}^{Q} m_i = m$, pak algoritmus končí alokací mandátů $(m_1, \ldots, m_Q)$. Pokud $\sum_{i=1}^{Q} m_i > m$, pak jdeme zpět na krok 2.

Při alokaci mandátů na kraje položíme $Q := R$ a za v_j dosadíme pro všechna $j = 1, \ldots, R$ hodnoty r_j a při alokaci mandátů na politické subjekty položíme $Q := P$ a za v_i dosadíme p_i pro všechna $i = 1, \ldots, P$.

4.2 Důkaz optimality nalezeného řešení

Dokažme nyní, že algoritmus Ψ najde při minimalizaci míry ρ optimální řešení úlohy (4), resp. úlohy (5). Důkaz provedeme sporem. Označme $\mathbf{x}^*$ řešení nalezené prostřednictvím algoritmu Ψ. Nechť tedy toto řešení není optimálním řešením úlohy (4), resp. úlohy (5). Musí tedy existovat způsob, jak snížit hodnotu účelové funkce. $\mathbf{x}^*$ je přípustným řešením úlohy, protože algoritmus Ψ skončí pouze tehdy, když je splněna podmínka na celkový součet. Musí tedy existovat nějaká dvojice indexů i a j takové, že $1 \leq i \neq j \leq P$, pro něž platí

$$\left(x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right)^2 + \left(x_j^* - 1 - m\frac{v_j}{v}\right)^2 < \left(x_i^* - m\frac{v_i}{v}\right)^2 + \left(x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right)^2 \qquad (6)$$
$$\Leftrightarrow \left(x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right) < \left(x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right),$$

Nyní proberme zvlášť dva případy.

- Je-li $\left(x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right) > 0$, pak podle (6) je i $\left(x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right) > 0$ a v kroku 3 algoritmu Ψ muselo při běhu někdy dojít k porovnání hodnot
$$\left(x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right)^2 \text{ a } \left(x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right)^2$$
a jako maximum musela být vybrána hodnota
$$\left(x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right)^2,$$
protože jinak by nemohlo být $x_i^* + 1$ sníženo o jedničku na hodnotu x_i^*, aniž by před tím nedošlo ke snížení hodnoty x_j^* na hodnotu $x_j^* - 1$. Musí tedy platit alespoň neostrá nerovnost
$$\left(x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right)^2 \geq \left(x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right)^2,$$
což je ovšem ve sporu s (6).

- Situace, kdy
$$\left(x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right) \leq 0,$$
nemůže nastat, protože pak musí být
$$\left(x_i^* - m\frac{v_i}{v}\right) < 0$$
a ke snížení z hodnoty $x_i^* + 1$ na hodnotu x_i^* nemohlo nikdy dojít, neboť v kroku 3 algoritmu Ψ vybíráme argument maxima jen z takových prvků, pro něž platí
$$\left(x_i - m\frac{v_i}{v}\right) > 0.$$

Zjistili jsme tedy, že žádná dvojice indexů i a j taková, že pro ně platí (6) neexistuje a tudíž neexistuje možnost, jak snížit hodnotu účelové funkce. Řešení $\mathbf{x}^*$ je tedy nejen přípustným řešením nalezeným algoritmem Ψ při minimalizaci míry ρ, ale také optimálním řešením úlohy (4), resp. (5) při účelové funkci dané mírou ρ.

Dokažme dále, že algoritmus Ψ najde optimální řešení úlohy (4), resp. úlohy (5) i při minimalizaci míry ϕ. Budeme postupovat opět sporem, předpokládaje, že $\mathbf{x}^*$ je řešením nalezeným algoritmem Ψ, při minimalizaci míry ϕ, ale není řešením optimálním. Vyjdeme z analogie k (6).

$$\left|x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right| + \left|x_j^* - 1 - m\frac{v_j}{v}\right| < \left|x_i^* - m\frac{v_i}{v}\right| + \left|x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right| \tag{7}$$

Pro jednoduchost nyní označme $A := x_i^* - m\frac{v_i}{v}$ a $B := x_j^* - m\frac{v_j}{v}$. Existuje 9 možností:

	A	B	$\lvert A+1\rvert + \lvert B-1\rvert < \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$	kdy platí?
1.	$A < -1$	$B < 0$	$0 < 0$	nikdy
2.	$A < -1$	$0 \leq B < 1$	$-B < B$	když $0 < B$
3.	$A < -1$	$B \geq 1$	$-2 < 0$	vždy
4.	$-1 \leq A < 0$	$B < 0$	$A < -1$	nikdy
5.	$-1 \leq A < 0$	$0 \leq B < 1$	$A + 1 < B$	když $A + 1 < B$
6.	$-1 \leq A < 0$	$B \geq 1$	$A < 0$	vždy
7.	$A \geq 0$	$B < 0$	$2 < 0$	nikdy
8.	$A \geq 0$	$0 \leq B < 1$	$2 < 0$	nikdy
9.	$A \geq 0$	$B \geq 1$	$0 < 0$	nikdy

Tabulka 1: Seznam všech možností, které mohou nastat

Podmínka (7) platí tehdy a jen tehdy, pokud nastává jedna ze situací z bodů 2, 3, 5, nebo 6 tabulky 1. Víme ale, že $A < -1$ nemůže nastat, jelikož $x_i^* - m\frac{v_i}{v} > -1$. To plyne z kroku 3 algoritmu Ψ, v němž vybíráme maximum pouze z těch hodnot x_i, pro které platí $x_i - m\frac{v_i}{v} > 0$ a pouze od nich odečítáme v kroku 4 jedničku. Nemůžeme se tedy nikdy dostat k $x_i^* - m\frac{v_i}{v} \leq -1$. Body 2 a 3 tedy nenastanou a zbývá ukázat, že bod 5 i bod 6 vedou ke sporu.

Bod 5 znamená (viz první tři sloupce řádku 5. tabulky 1), že platí zároveň $-1 \leq x_i^* - m\frac{v_i}{v} < 0$, $0 \leq x_j^* - m\frac{v_j}{v} < 1$ a $x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v} < x_j^* - m\frac{v_j}{v}$. Algoritmus Ψ musel v některém z kroků stát před porovnáním hodnot $\left|x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right|$ a $\left|x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right|$ a jako větší vybral hodnotu $\left|x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right|$, protože jinak by musel před snížením hodnoty $x_i^* + 1$ o jedničku na hodnotu x_i^* snížit hodnotu x_j^* o jedničku a k tomu nedošlo. Proto tedy musí platit $\left|x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right| \geq \left|x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right|$. Dostáváme tedy vzhledem k nezápornosti

$x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}$ a nezápornosti $x_j^* - m\frac{v_j}{v}$ nerovnost $x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v} \geq x_j^* - m\frac{v_i}{v}$, která je ve sporu s $x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v} < x_j^* - m\frac{v_j}{v}$. Situace popsaná v bodu 5 tedy také nemůže nastat.

Bod 6 znamená (viz první dva sloupce řádku 6. tabulky 1), že platí $0 \leq x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v} < 1$ a $x_j^* - m\frac{v_j}{v} \geq 1$. Ze stejného důvodu, jako v bodu 5 musí ale platit

$$\left| x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v} \right| \geq \left| x_j^* - m\frac{v_j}{v} \right|.$$

Protože absolutní hodnoty jsou zde aplikovány na nezáporná čísla, lze je vynechat a dostáváme

$$1 > x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v} \geq x_j^* - m\frac{v_j}{v} \geq 1,$$

což je totéž jako $1 > 1$. Situace z bodu 6 tedy rovněž nenastane. Tím se však dostáváme do sporu s předpokladem, že $\mathbf{x}^*$ není optimálním řešením úlohy (4), resp. úlohy (4) při minimalizaci míry ϕ.

Zbývá dokázat, že algoritmus Ψ najde optimální řešení úlohy (4), resp. úlohy (5) i při minimalizaci míry ξ. Budeme postupovat opět sporem, předpokládaje, že $\mathbf{x}^*$ je řešením nalezeným algoritmem Ψ při minimalizaci míry ξ, ale není řešením optimálním. Vyjdeme z analogie k (6).

$$\frac{\left(x_i^* + 1 - m\frac{v_i}{v}\right)^2}{m\frac{v_i}{v}} + \frac{\left(x_j^* - 1 - m\frac{v_j}{v}\right)^2}{m\frac{v_i}{v}} < \frac{\left(x_i^* - m\frac{v_i}{v}\right)^2}{m\frac{v_j}{v}} + \frac{\left(x_j^* - m\frac{v_j}{v}\right)^2}{m\frac{v_j}{v}} \qquad (8)$$
$$\Leftrightarrow \frac{x_i^* + \frac{1}{2}}{v_i} < \frac{x_j^* - \frac{1}{2}}{v_j}$$

V některém okamžiku běhu algoritmu Ψ ale muselo dojít k porovnání hodnot $\frac{x_i^*+\frac{1}{2}}{v_i}$ a $\frac{x_j^*-\frac{1}{2}}{v_j}$ a jako maximum byla vybrána hodnota $\frac{x_i^*+\frac{1}{2}}{v_i}$. Tudíž

$$\frac{x_i^* + \frac{1}{2}}{v_i} \geq \frac{x_j^* - \frac{1}{2}}{v_j},$$

což je ve sporu s (8). Žádná dvojice indexů i a j taková, že pro ně platí (8) neexistuje a tudíž neexistuje možnost, jak snížit hodnotu účelové funkce. Řešení $\mathbf{x}^*$ je tedy nejen řešením nalezeným algoritmem Ψ při minimalizaci míry ξ, ale také řešením optimálním při účelové funkci dané mírou ξ.

5 Alokační algoritmus $\Psi^\bullet$

5.1 Popis algoritmu

Vytvoříme algoritmus, který povede k přiřazení počtu mandátů jednotlivým kandidujícím politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech. Tento alokační algoritmus je zobecněním alokačního algoritmu Ψ a budeme jej využívat k nalezení nebo alespoň odhadu optimálního řešení následující obecné úlohy celočíselného programování:

$$
\begin{array}{lll}
\min\limits_{x_{ij},\ i=1,\dots,P,\ j=1,\dots,R} & \sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R}\left(m_{ij}-m\frac{v_{ij}}{v}\right)^2 & \\
\text{za podmínek} & \sum_{i=1}^{P} m_{ij} = L_j & j=1,\dots,R, \\
& \sum_{j=1}^{R} m_{ij} = M_i & i=1,\dots,P, \\
& m_{ij}\in\mathbb{N}_0 & i=1,\dots,P,\ j=1,\dots,R,
\end{array}
\tag{9}
$$

kde P je počet kandidujících politických subjektů, které prošly přes uzavírací klauzuli, R je počet volebních obvodů, v je celkový počet platných odevzdaných hlasů ve volbách pro politické subjekty, které prošly přes uzavírací klauzuli, m je celkový počet mandátů, L_j, $j = 1,\dots,R$ a M_i, $i = 1,\dots,P$ jsou přirozená čísla pro něž platí podmínka vyváženosti $m = \sum_{i=1}^{P} M_i = \sum_{j=1}^{R} L_j$. Jde o úlohu s omezeními, které odpovídají vyváženému dopravnímu problému. Pokud bychom tedy měli lineární účelovou funkci, pak bychom dostali vyvážený dopravní problém, který by měl automaticky celočíselné řešení a který by bylo možné řešit v polynomiálním čase třeba pomocí elipsoidové metody. Naše účelová funkce ale lineární není. Pro jednodušší formální zápis kroků algoritmu označme nyní $\mathcal{F} = \{1,\dots,P\}\times\{1,\dots,R\}$.

Alokační algoritmus má následující kroky:

1. Přiřadíme $m_{ij} := m$ pro všechna $i = 1,\dots,P$, a všechna $j = 1,\dots,R$.
2. Pro každou uspořádanou dvojici indexů $(i, j) \in \mathcal{F}$ spočítáme $\left(m_{ij} - m\frac{v_{ij}}{v}\right)^2$.
3. Najdeme takovou uspořádanou dvojici indexů (i^*, j^*) pro níž platí $m_{i^*j^*} > m\frac{v_{i^*j^*}}{v}$ a

$$\left(m_{i^*j^*} - m\frac{v_{i^*j^*}}{v}\right)^2 \geq \left(m_{ij} - m\frac{v_{ij}}{v}\right)^2,$$

pro všechna $(i,j) \in \mathcal{F}$ taková, že $m_{ij} > m\frac{v_{ij}}{v}$ v případě minimalizace míry ρ,

$$\left| m_{i^*j^*} - m\frac{v_{i^*j^*}}{v} \right| \geq \left| m_{ij} - m\frac{v_{ij}}{v} \right|,$$

pro všechna $(i,j) \in \mathcal{F}$ taková, že $m_{ij} > m\frac{v_{ij}}{v}$ v případě minimalizace míry ϕ a

$$\frac{m_{i^*j^*} - \frac{1}{2}}{m\frac{v_{i^*j^*}}{v}} \geq \frac{m_{ij} - \frac{1}{2}}{m\frac{v_{ij}}{v}},$$

pro všechna $(i,j) \in \mathcal{F}$ taková, že $m_{ij} > m\frac{v_{ij}}{v}$ v případě minimalizace míry ξ. Pokud je takových uspořádaných dvojic více, vybereme tu s nejnižším indexem i^* a pokud i takových dvojic je více, vybereme tu s nejnižším indexem j^*.

4. Položíme $m_{i^*j^*} := m_{i^*j^*} - 1$.

5. Pokud $\sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{P} m_{ij} = m$, pak přejdeme na krok 6, jinak se vrátíme na krok 2.

6. Definujme množinu $\Omega := \left\{ i \in \{1, \ldots, P\} : \sum_{j=1}^{R} m_{ij} > M_i \right\}$, množinu $\Phi := \left\{ j \in \{1, \ldots, R\} : \sum_{i=1}^{P} m_{ij} > L_j \right\}$ a množinu $\Delta := \Omega \times \Phi$. Pokud $\Omega = \emptyset$, pak jdeme na krok 8.

7. Položíme

$$(i', j') := \arg \min_{(i,j) \in \Delta} \left\{ \left(m_{ij} - 1 - m\frac{v_{ij}}{v} \right)^2 - \left(m_{ij} - m\frac{v_{ij}}{v} \right)^2 \right\}$$

pro míru ρ,

$$(i', j') := \arg \min_{(i,j) \in \Delta} \left\{ \left| m_{ij} - 1 - m\frac{v_{ij}}{v} \right| - \left| m_{ij} - m\frac{v_{ij}}{v} \right| \right\}$$

pro míru ϕ a

$$(i', j') := \arg \max_{(i,j) \in \Delta} \left\{ \frac{m_{ij} v}{v_{ij} m} \right\}$$

pro míru ξ. Dále položíme $m_{i'j'} := m_{i'j'} - 1$ a vrátíme se na krok 6.

8. Definujme množinu $\Lambda := \left\{ i \in \{1, \ldots, P\} : \sum_{j=1}^{R} m_{ij} < M_i \right\}$, množinu $\Xi := \left\{ j \in \{1, \ldots, R\} : \sum_{i=1}^{P} m_{ij} < L_j \right\}$ a množinu $\Theta := \Lambda \times \Xi$. Pokud $\Lambda = \emptyset$, pak algoritmus končí alokací m_{ij} mandátů subjektu i ve volebním obvodu j pro všechna $i \in \{1, \ldots, P\}$ a všechna $j \in \{1, \ldots, R\}$.

9. Položíme

$$(i', j') := \arg \min_{(i,j) \in \Theta} \left\{ \left(m_{ij} + 1 - m \frac{v_{ij}}{v} \right)^2 - \left(m_{ij} - m \frac{v_{ij}}{v} \right)^2 \right\}$$

pro míru ρ

$$(i', j') := \arg \min_{(i,j) \in \Theta} \left\{ \left| m_{ij} + 1 - m \frac{v_{ij}}{v} \right| - \left| m_{ij} - m \frac{v_{ij}}{v} \right| \right\}$$

pro míru ϕ

$$(i', j') := \arg \min_{(i,j) \in \Theta} \left\{ \frac{m_{ij} v}{v_{ij} m} \right\}$$

pro míru ξ. Dále položíme $m_{i'j'} := m_{i'j'} + 1$ a vrátíme se na krok 8.

Tento algoritmus najde ale pouze suboptimální řešení a navíc nikoli nutně nezáporné. Proto jej doplníme ještě iteračním algoritmem, který, jak si později dokážeme, vede k řešení optimálnímu, za předpokladu, že je toto řešení nezáporné. Tento iterační algoritmus je založen na myšlence tzv. ε-změny.

Celočíselnou $\varepsilon_{(i,j),(k,l)}$-změnou budeme nazývat zobrazení z množiny celočíselných matic do množiny celočíselných matic stejného typu dané předpisem:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \ldots & a_{i,j} & \ldots & a_{i,l} & \ldots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \ldots & a_{k,j} & \ldots & a_{k,l} & \ldots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \ldots & a_{i,j} + \varepsilon & \ldots & a_{i,l} - \varepsilon & \ldots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \ldots & a_{k,j} - \varepsilon & \ldots & a_{k,l} + \varepsilon & \ldots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $\varepsilon \in \mathbf{Z}$. Obecnou celočíselnou ε-změnu bez konkrétní specifikace řádkových a sloupcových indexů, budeme značit prostě jako ε-změnu. Budeme-li v dalším textu zmiňovat ε-změnu, budeme vždy mít na mysli celočíselnou ε-změnu.

Hlavní vlastností ε-změny je skutečnost, že je-li aplikována na matici splňující omezující podmínky (vyjma podmínky na nezápornost proměnných) úlohy (9), pak jejím výstupem je opět matice splňující omezující podmínky téže úlohy. Právě popsaný alokační algoritmus tedy doplníme iteračním algoritmem, který zjišťuje existenci takové 1-změny (či -1-změny), při níž dojde ke snížení hodnoty účelové funkce a pokud alespoň jedna taková 1-změna (či -1-změna) existuje, tak aplikuje tu, která sníží hodnotu účelové funkce nejvíce. Takto postupuje až do okamžiku, kdy již žádná taková 1-změna ani -1-změna neexistuje. Pokud je výsledné řešení nezáporné, je to již hledané optimální řešení úlohy (9), jak si dokážeme později. Pokud nezáporné není, pak k nalezení přípustného řešení použijeme metodu severozápadního rohu (která vede vždy k nezápornému přípustnému řešení) a poté aplikujeme následující heuristický iterační algoritmus založený opět na ε-změně.

1. Najdeme všechny ε-změny, kde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ takové, že po jejich aplikaci zůstane matice řešení nezáporná a hodnota účelové funkce klesne. Množinu všech takových ε-změn označíme $\mathcal{V}$.

2. Ze všech ε-změn z množiny $\mathcal{V}$ vybereme tu, která vede k největšímu poklesu hodnoty účelové funkce a aplikujeme jí na aktuální matici řešení.

3. Pokud množina $\mathcal{V}$ je prázdná, algoritmus končí s aktuálním přípustným řešením. Pokud není prázdná, vrátíme se na krok 1.

Vzhledem k faktu, že v každém kroku musí dojít ke snížení hodnoty účelové funkce, je algoritmus konečný. Nemusí však nutně vést k optimálnímu řešení. Dodejme ale, že k tomuto heuristickému algoritmu nebylo třeba přistoupit v případě žádných z analyzovaných voleb.

Spojením popsaného alokačního a iteračního algoritmu (případně i metody severozápadního rohu a heuristického iteračního algoritmu) vznikne algoritmus, který označujeme $\Psi^\bullet$.

5.2 Důkaz optimality nalezeného nezáporného řešení

Dokažme nyní, že algoritmus $\Psi^\bullet$ najde optimální řešení úlohy (9) za předpokladu, že toto řešení je nezáporné. K tomu potřebujeme dokázat několik tvrzení. Jednak, že algoritmus vždy skončí, jednak že najde přípustné řešení a jednak, že toto přípustné řešení je zároveň optimální, je-li nezáporné.

Skutečnost, že alokační část algoritmu skončí ukážeme poměrně snadno. Stačí ukázat, že algoritmus se nikde nezacyklí. K tomu však může dojít pouze v kroku 3, v němž by nemusela existovat hledaná uspořádaná dvojice indexů. Existence uspořádané dvojice indexů $(i, j) \in \mathcal{F}$ takové, že

$$m_{ij} > m\frac{v_{ij}}{v}$$

je dána tím, že do kroku 3 se algoritmus dostane pouze pokud platí

$$\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R} m_{ij} > m.$$

Protože ale platí

$$\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R} m\frac{v_{ij}}{v} = m,$$

platí také

$$\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R} m_{ij} > \sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R} m\frac{v_{ij}}{v},$$

a nemůže tudíž pro všechna $(i, j) \in \mathcal{F}$ být

$$m_{ij} \leq m\frac{v_{ij}}{v}.$$

Existuje tedy alespoň jedna dvojice indexů $(i', j') \in \mathcal{F}$ taková, že platí

$$m_{i'j'} > m\frac{v_{i'j'}}{v}.$$

Tím je zaručeno, že v kroku 3 algoritmus vždy má z čeho vybírat maximum.

Maximum v kroku 3 je vždy vybráno jen pro takovou uspořádanou dvojici indexů $(i', j') \in \mathcal{F}$, pro níž platí

$$m\frac{v_{i'j'}}{v} < m_{i'j'} \in \mathbb{N}$$

a proto je vždy v kroku 4 alokačního algoritmu odečítána jednička od celého čísla, které je větší, nebo rovno jedné (platí totiž $m\frac{v_{i'j'}}{v} \geq 0$). Z toho plyne, že při přechodu algoritmu na krok 6 bude aktuální matice tvořená hodnotami m_{ij} nezáporná.

V kroku 6 testujeme pouze zda existuje nějaký řádek, jehož součet je vyšší, než příslušné řádkové omezení prostřednictvím formulace $\Omega = \emptyset$, neboť $\Omega = \emptyset$, právě tehdy, když $\Phi = \emptyset$.[3]

Algoritmus v kroku 7 snižuje o jedničku všechny hodnoty m_{ij} pro něž platí $\sum_{k=1}^{P} m_{kj} > L_j$ a $\sum_{k=1}^{R} m_{ik} > M_i$ a to tak dlouho, dokud existují. Skončí

[3]Součet všech hodnot tabulky je vyšší než součet všech řádkových omezení, právě tehdy, když je vyšší než součet všech sloupcových omezení, protože součet všech řádkových omezení a součet všech sloupcových omezení jsou si rovny.

ve chvíli, kdy žádný řádkový ani sloupcový součet není vyšší, než příslušné řádkové, či sloupcové omezení. Pochopitelně v tomto okamžiku platí

$$\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R} m_{ij} \leq m$$

a algoritmus se posouvá do závěrečné fáze na krok 8.

V kroku 8 testujeme pouze zda existuje nějaký řádek, jehož součet je nižší, než příslušné řádkové omezení prostřednictvím formulace $\Lambda = \emptyset$ z analogického důvodu, jako v kroku 6. Algoritmus nyní zvyšuje všechny hodnoty m_{ij} pro něž platí $\sum_{k=1}^{P} m_{kj} < L_j$ a $\sum_{k=1}^{R} m_{ik} < M_i$ a to tak dlouho, dokud existují. Skončí ve chvíli, kdy žádný řádkový ani sloupcový součet není nižší, než příslušné řádkové, či sloupcové omezení. V tomto okamžiku již platí

$$\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R} m_{ij} = m$$

a jsou splněna všechna řádková a sloupcová omezení. Algoritmus tedy nalezl přípustné řešení úlohy (9) s podmínkou (9) s podmínkou $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$. Nezáporné přípustné řešení jsme samozřejmě mohli nalézt i mnohem méně sofistikovanou metodou (třeba metodou severozápadního rohu, Vogelovou metodou, apod.), nicméně náš alokační algoritmus najde řešení, které je již velmi "blízko"k řešení optimálnímu. To ale nemusí být řešením nezáporným.

Zbývá ukázat, že konečnou posloupností aplikací 1-změn a -1-změn dospějeme k optimálnímu řešení úlohy (9) s podmínkou $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$. Platí tvrzení, že máme-li dvě matice, které splňují stejná řádková a sloupcová omezení, existuje konečná posloupnost 1-změn a -1-změn taková, že jejich aplikací na jednu z matic, dostaneme tu druhou[4]. Víme, že optimální řešení existuje, protože množina přípustných řešení je konečná a účelová funkce (ať již jde o libovolnou ze tří měr disproporcionality) je zdola omezená nulou. Musí tedy existovat nějaká posloupnost 1-změn a -1-změn taková, že jejich aplikací na matici, která je výstupem alokačního algoritmu $\Psi^{\bullet}$ dostaneme řešení, které je-li nezáporné, je i optimální.

Na každou ε-změnu je možné nahlížet jako na matici a na aplikaci ε-změny jako na přičítání této matice k původní matici. Protože množina všech matic reprezentujících celočíselné ε-změny je uzavřená na sčítání a toto sčítání je komutativní a asociativní, ke každé ε-změně existuje opačná a pro všechny existuje jedna nulová 0-změna, je tato množina spolu s binární operací sčítání komutativní (Abelovou) grupou. Když pak libovolný prvek této grupy přičteme

[4]To lze snadno dokázat konstrukcí takové posloupnosti.

k libovolnému přípustnému řešení úlohy (9) s podmínkou $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$, dostaneme opět přípustné řešení této úlohy. Mějme tedy nějaké přípustné řešení úlohy (9) s podmínkou $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$. Víme, že existuje posloupnost celočíselných ε-změn taková, že jejich postupnou aplikací na toto přípustné řešení dostaneme řešení optimální (označme tuto posloupnost v maticovém značení $B_1, \ldots, B_K$). Pak žádný z prvků této posloupnosti nemůže sám o sobě zvýšit hodnotu účelové funkce. Kdyby tomu tak bylo, aplikovali bychom k němu opačnou ε-změnu a tím by došlo ke snížení hodnoty účelové funkce a to je ve sporu s tím, že posloupnost $B_1, \ldots, B_K$ vede k optimálnímu řešení. Pokud tedy máme přípustné řešení a víme, že neexistuje žádná 1-změna ani žádná -1-změna, která by vedla ke snížení hodnoty účelové funkce, musí být již stávající přípustné řešení úlohy (9) s podmínkou $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$ optimálním řešením této úlohy.

Tento argument však nelze použít při podmínce nezápornosti $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$, protože pak množina všech přípustných (tj. takových, které vedou k nezápornému řešení) celočíselných ε-změn již není Abelovou grupou, jelikož není zaručena existence přípustné opačné ε-změny ke každému z prvků posloupnosti $B_1, \ldots, B_K$. Proto v případě, že optimální řešení úlohy (9) s podmínkou $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$ není nezáporné, nemusí algoritmus $\Psi^\bullet$ nutně nalézt řešení úlohy (9) s podmínkou $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$. Najde však alespoň nějaký jeho odhad. Naopak pokud optimální řešení úlohy (9) s podmínkou $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $m_{ij} \in \mathbb{N}_0$ je nezáporné, algoritmus $\Psi^\bullet$ jej vždy najde, neboť jeho iterativní část se zastaví až v okamžiku, kdy neexistuje žádná 1-změna, ani -1změna, které by vedly ke snížení hodnoty účelové funkce.

6 Společný základ navrhovaných algoritmů

První tři kroky jsou společné všem třem navrhovaným algoritmům a proto je popíšeme pouze jednou.

1. Prvním krokem všech navrhovaných algoritmů je aplikace uzavírací klauzule. Tento krok není nevyhnutelný a na možnost použití algoritmu nemá žádný vliv. Aby mělo smysl porovnávat dosaženou míru proporcionality s jinými volebními systémy, budeme vždy aplikovat stejnou uzavírací klauzuli jaká je aplikována ve volebním systému s nímž chceme výsledky porovnávat.

2. Druhým krokem všech navrhovaných algoritmů je aplikace alokačního algoritmu Ψ na alokaci mandátů jednotlivým kandidujícím politickým

subjektům a to nezávisle na volebních obvodech. Pro každý z algoritmů se pouze v algoritmu Ψ použije jemu příslušná míra disproporcionality.

3. Třetím krokem všech navrhovaných algoritmů je aplikace alokačního algoritmu Ψ na alokaci mandátů jednotlivým volebním obvodům a to nezávisle na jednotlivých kandidujících politických subjektech. Pro každý z algoritmů se pouze v algoritmu Ψ použije jemu příslušná míra disproporcionality.

Nyní popišme tyto tři kroky formálně.

1. První krok algoritmu znamená, že pro všechna $i' = 1, \ldots, P'$ ověříme platnost nerovnosti $\frac{p'_{i'}}{v'} > u$. Pokud pro dané i' tato rovnost platí, politický subjekt i' splnil uzavírací klauzuli. Pokud neplatí, politický subjekt i' je vyřazen z množiny $\mathcal{P}'$ a nejsou mu alokovány žádné mandáty ve voleném orgánu. Poté, co jsou vyřazeny všechny kandidující politické subjekty, které nesplnily uzavírací klauzuli, zbyde z původní množiny $\mathcal{P}'$ množina všech politických subjektů, které jí splnily. Označme jí $\mathcal{P}$. Její prvky jsou označeny nějakými indexy $i'_1 < \ldots < i'_P$. Místo indexu i', který jednoznačně označoval politický subjekt z množiny všech kandidujících subjektů $\mathcal{P}'$ budeme nyní vzhledem k restrikci na množinu $\mathcal{P}$ používat index $i \in \{1, \ldots, P\}$ daný pořadím v uspořádané P-tici indexů $(i'_1, \ldots, i'_P)$. Dále pro každý politický subjekt $i \in \{1, \ldots, P\}$ položíme $p_i := p'_{i'_i}$ a pro každé $j = 1, \ldots, R$ a každé $i = 1, \ldots, P$ položíme $v_{ij} := v'_{i'_i j}$ a $v := \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{R} v_{ij}$. Celkový počet hlasů odevzdaných ve volbách se tedy sníží na celkový počet hlasů odevzdaných pouze těm politickým subjektům, které postupují do skrutinia. Označme dále r_j počet platných hlasů odevzdaných všem politickým subjektům postoupivším do skrutinia, ve volebním obvodu j a to pro všechna $j = 1, \ldots, R$.

2. Ve druhém kroku aplikujeme alokační algoritmus Ψ na alokaci mandátů jednotlivým kandidujícícm politickým subjektům. Označme M_i počet mandátů přiřazených tímto algoritmem politickému subjektu i pro všechna $i = 1, \ldots, P$.

3. Ve třetím kroku aplikujeme alokační algoritmus Ψ na alokaci mandátů jednotlivým volebním obvodům. Označme L_j počet mandátů přiřazených tímto algoritmem volebnímu obvodu j pro všechna $j = 1, \ldots, R$.

7 Algoritmus pro míru disproporcionality ρ

První tři kroky algoritmu jsou popsány ve společném základu navrhovaných algoritmů.

4. Nyní sestavíme tabulku s počty hlasů, kde sloupce představují jednotlivé volební obvody a řádky kandidující politické subjekty, které prošly přes uzavírací klauzuli. Tabulka obsahuje v $i-$tém řádku a $j-$tém sloupci hodnotu v_{ij}. Dokonale proporcionální výsledek voleb je dán maticí typu $P \times R$ s prvky $\tilde{m}_{ij} := m\frac{v_{ij}}{v}$, kde $i = 1, \ldots, P$ a $j = 1, \ldots, R$.

5. Protože alokovat necelé mandáty nelze, musíme řešit následující problém celočíselného nelineárního programování:

$$\begin{aligned} &\min_{d_{ij},\ i=1,\ldots,P,\ j=1,\ldots,R} && \sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R}\left(\tilde{m}_{ij} - d_{ij}\right)^2 \\ &\text{za podmínek} && \sum_{i=1}^{P} d_{ij} = L_j \quad j = 1, \ldots, R, \\ & && \sum_{j=1}^{R} d_{ij} = M_i \quad i = 1, \ldots, P, \\ & && d_{ij} \in \mathbb{N}_0 \qquad i = 1, \ldots, P,\ j = 1, \ldots, R. \end{aligned} \tag{10}$$

   Hledáme tedy takovou matici $D^* = \left(d^*_{ij}\right)_{i=1,\ldots,P}^{j=1,\ldots,R}$, která obsahuje jen nezáporná celá čísla a která je řešením úlohy (10). Za předpokladu, že je řešení úlohy (10) s podmínkou $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $d_{ij} \in \mathbb{N}_0$ nezáporné, najdeme jej prostřednictvím algoritmu $\Psi^\bullet$ minimalizujícího míru disproporcionality ρ. Pokud není nezáporné, najde algoritmus $\Psi^\bullet$ jeho odhad.

Výsledný počet mandátů alokovaný ve prospěch politického subjektu i ve volebním obvodu j je roven d^*_{ij}.

8 Algoritmus pro míru disproporcionality ϕ

První tři kroky algoritmu jsou popsány ve společném základu navrhovaných algoritmů.

4. Nyní sestavíme tabulku s počty hlasů, kde sloupce představují jednotlivé volební obvody a řádky kandidující politické subjekty, které postoupily do skrutinia. Tabulka obsahuje v $i-$tém řádku a $j-$tém sloupci hodnotu v_{ij}. Dokonale proporcionální výsledek voleb je dán maticí typu $P \times R$ s prvky $\tilde{m}_{ij} := m\frac{v_{ij}}{v}$, kde $i = 1, \ldots, P$ a $j = 1, \ldots, R$.

5. Hledáme matici $D^* = \left(d^*_{ij}\right)_{i=1,\dots,P}^{j=1,\dots,R}$, která je řešením úlohy (11).

$$\begin{aligned} &\min_{d_{ij},\ i=1,\dots,P,\ j=1,\dots,R} && \textstyle\sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{R} |\tilde{m}_{ij} - d_{ij}| \\ &\text{za podmínek} && \textstyle\sum_{i=1}^{P} d_{ij} = L_j \quad j = 1,\dots,R, \\ & && \textstyle\sum_{j=1}^{R} d_{ij} = M_i \quad i = 1,\dots,P, \\ & && d_{ij} \in \mathbb{N}_0 \qquad i = 1,\dots,P,\ j = 1,\dots,R, \end{aligned} \tag{11}$$

Za předpokladu, že je řešení úlohy (11) s podmínkou $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $d_{ij} \in \mathbb{N}_0$ nezáporné, najdeme jej prostřednictvím algoritmu $\Psi^\bullet$ minimalizujícího míru disproporcionality ϕ. Pokud není nezáporné, najde algoritmus $\Psi^\bullet$ jeho odhad.

Výsledný počet mandátů alokovaný ve prospěch politického subjektu i ve volebním obvodu j je roven d^*_{ij}.

9 Algoritmus pro míru disproporcionality ξ

První tři kroky algoritmu jsou popsány ve společném základu navrhovaných algoritmů. Tento algoritmus má ale narozdíl od dvou předešlých několik dodatečných podmínek, které vyplývají z konstrukce míry ξ. Ta je definována podílem, kde ve jmenovateli je počet platných hlasů v_{ij} odevzdaných ve prospěch politického subjektu i ve volebním obvodu j a ten pochopitelně nesmí být nulový. Navíc nesmí být nulová ani žádná z hodnot M_i pro libovolné $i = 1,\dots,P$ a žádná z hodnot L_j pro libovolné $j = 1,\dots,R$. To se ale vzhledem k uzavírací klauzuli pro žádné M_i nestane (nanejvýš může být $P = 0$ a k alokaci mandátů vůbec nedojde). Pokud by $L_{j'} = 0$, pro nějaké $j' \in \{1,\dots,R\}$ pak bychom volební obvod j' vynechali z dalších úvah.

4. Sestavíme tabulku s počty hlasů, kde sloupce představují jednotlivé volební obvody a řádky kandidující politické subjekty, které postoupily do skrutinia. Tabulka obsahuje v $i-$tém řádku a $j-$tém sloupci hodnotu v_{ij}. Dokonale proporcionální výsledek voleb je dán maticí typu $P \times R$ s prvky $\tilde{m}_{ij} := m\frac{v_{ij}}{v}$, kde $i = 1,\dots,P$ a $j = 1,\dots,R$.

5. Hledáme matici $D^* = \left(d^*_{ij}\right)_{i=1,\dots,P}^{j=1,\dots,R}$, která je řešením úlohy (12).

$$\begin{aligned} &\min_{d_{ij},\ i=1,\dots,P} && \textstyle\sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{R}\frac{(d_{ij}-\tilde{m})^2}{\tilde{m}} \\ &\text{za podmínek} && \textstyle\sum_{i=1}^{P} d_{ij} = L_j \quad j=1,\dots,R, \\ & && \textstyle\sum_{j=1}^{R} d_{ij} = M_i \quad i=1,\dots,P, \\ & && d_{ij}\in\mathbb{N}_0 \qquad i=1,\dots,P,\ j=1,\dots,R. \end{aligned} \tag{12}$$

Za předpokladu, že je řešení úlohy (12) s podmínkou $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ namísto podmínky $d_{ij} \in \mathbb{N}_0$ nezáporné, najdeme jej prostřednictvím algoritmu $\Psi^\bullet$ minimalizujícího míru disproporcionality ξ. Pokud není nezáporné, najde algoritmus $\Psi^\bullet$ jeho odhad.

Výsledný počet mandátů pro politický subjekt i ve volebním obvodu j je roven d^*_{ij}.

10 Ověření použitelnosti navrhovaných algoritmů v praxi

Vraťme se nyní ke zmíněným třem vlastnostem uvedených algoritmů, jejichž splnění je nutné pro reálné použití ve volbách do PS PČR. Jistě jde o algoritmy deterministické, které vedou při každé aplikaci na stejné vstupy ke stejnému výstupu. Je tomu tak proto, že k řešení nevyužíváme žádných metod založených na generování náhodných čísel. Všechny námi používané algoritmy jsou deterministické.

Algoritmy jsou aplikovatelné na reálná data a vzhledem k uvedeným omezujícím podmínkám na nezápornost proměnných nevede ani jeden z nich k alokaci záporného počtu mandátů. Algoritmus Ψ sice může dospět k řešení, které není nezáporné, ale tato možnost je ošetřena následným druhým nápočtem obecně suboptimálního nezáporného řešení. Nalezené výsledné řešení tedy bude vždy nezáporné.

Pokud jde o rychlost jakou algoritmy dospějí k řešení, algoritmus Ψ má složitost $\mathcal{O}(mQ^2)$ a algoritmus $\Psi^\bullet$ má složitost $\mathcal{O}\left((m+1)\,P^2R^2\right)$. Řešení je tedy nalezeno vždy v polynomiálním čase. Při praktické aplikaci na konkrétní historická data z voleb do PS PČR nalezl algoritmus Ψ řešení vždy v čase nižším, než 1 vteřina, algoritmus $\Psi^\bullet$ nalezl řešení v řádu desítek vteřin až minut, nikdy ale nepřekročil tříminutovou hranici.

Všechny tři požadované vlastnosti námi navrhované algoritmy splňují. Zastavme se ale ještě u jedné důležité vlastnosti a tou je jednoznačnost řešení. Optimální řešení nemusí existovat vždy jen jedno.

Uvažujme situaci, kdy jedna politická strana obdrží přesně 5% hlasů a druhá přesně zbylých 95% hlasů. Alokujeme-li 10 mandátů, bude výstup algoritmu záviset na pořadí stran. Menší straně může být alokován buď jeden, nebo žádný mandát a větší buď devět, nebo deset mandátů. Důvodem pro toto chování je výběr maxima v kroku 3. algoritmu Ψ, které není dáno jednoznačně a algoritmus je v takovém případě navržen tak, aby vybral nejprve to maximum, které odpovídá straně s nejnižším indexem. Tomuto jevu není možné se zcela vyhnout a nevyhnou se mu ani aktuálně používané metody, včetně d'Hondtova dělitele. Další problém, který z této nejednoznačnosti plyne je problém přiřazení různého počtu mandátů stranám se shodným počtem získaných hlasů. Uvažujme situaci, kdy kandidují pouze tři strany, dvě obdrží 5% hlasů a třetí zbylých 90%. Alokujeme-li opět právě 10 mandátů, obdrží největší strana 9 mandátů a ostatní dvě strany se musejí podělit o jeden mandát, který připadne pouze jedné z nich.

Protože uspořádání stran i volebních obvodů je dáno počtem hlasů a není tedy ani otázkou náhody, ani libovůle nějakého subjektu, zbývá dořešit pouze situaci, kdy několik stran získá ve volbách stejný počet hlasů, resp. situaci, kdy stejný počet hlasů je odevzdán v několika různých volebních obvodech. Potom o jejich pořadí v rámci skupiny se shodným počtem hlasů musí rozhodnout los. Navržené algoritmy ale jsou samy o sobě deterministické.

Dodejme na závěr této kapitoly, že popsané, ne příliš žádoucí chování navrhovaných algoritmů nelze odstranit a zcela analogicky (včetně použití losu) se s ním vyrovnávají i jiné volební systémy, včetně toho aktuálně používaného ve volbách do PS PČR.

11 Porovnání stávajících a navržených volebních systémů

Všechny tři navrhované volební systémy mají význam pouze tehdy, když jsou volební obvody dostatečně velké, aby v každém z nich docházelo k alokaci alespoň pěti mandátů. Podle používané klasifikace volebních obvodů (viz. `http://cs.wikipedia.org/wiki/Volebn%C3%AD_obvod`) by mělo jít alespoň o středně velké volební obvody. Pokud by naopak bylo volebních obvodů hodně a byly by kupříkladu pouze jednomandátové, jako je tomu u voleb do Senátu PČR, pak by navrhované volební systémy nemělo smysl zavádět.

Výsledky alokace mandátů prostřednictvím navrhovaných algoritmů jsme porovnali na datech z jednotlivých voleb do České národní rady (kterou lze považovat za předchůdkyni PS PČR) a jednotlivých voleb do PS PČR, které proběhly po roce 1989. Jedná se o volby z let 1990, 1992, 1996, 1998, 2002, 2006 a 2010. Kompletní data o těchto volbách čerpáme z oficiálního interentového zdroje Českého statistického úřadu (viz. `http://www.volby.cz`). Porovnávali jsme všechny tři navržené algoritmy s aktuálně platným volebním systémem a s dalšími osmnácti volebními systémy, které jsme vybrali náhodně jako kombinace nejrůznějších běžně používaných metod přepočtu hlasů na mandáty a to vše při 5% uzavírací klauzuli. Těchto osmnáct volebních systémů tvoří vzorek z množiny všech možných kombinací metod přepočtu hlasů na mandáty, která obsahuje tisíce prvků. Náhodný výběr z této množiny byl proveden proto, že porovnávat výsledky tisíců volebních systémů, které často dávají stejné výsledky, je v rozsahu tohoto textu nemožné.

Ke každému z porovnávaných volebních systémů jsme spočítali všechny tři míry disproporcionality (1), (2) a (3). Kdykoliv výpočet míry disproporcionality (3) nedával smysl vzhledem k dělení nulou, výslednou hodnotu disproporcionality jsme označili jako NA (not applicable). Všechny tři míry disproporcionality jsme použili u každého volebního systému třikrát:

1. na alokaci mandátů stranám,
2. na alokaci mandátů volebním obvodům,
3. na alokaci mandátů kombinaci stran a volebních obvodů.

Protože za hlavní přínos nízké disproporcionality považujeme jistou rovnost mezi a priorní silou jednotlivých voličů a z toho vyplývající spravedlivé rozdělení mandátů, jsou pro nás pochopitelně žádoucí nižší hodnoty měr disproporcionality.

Jednotlivé volební systémy, s nimiž námi navržené algoritmy porovnáváme, využívají běžně používaných metod přepočtu hlasů na mandáty. Každou metodu přepočtu, kterou využívá některý z volebních systémů, označujeme zkratkou podle tabulky 2. Jednotlivé metody jsou blíže popsány například v publikaci [Leb09].

Námi navrhované algoritmy značíme N1 (minimalizující míru odchylky ρ), N2 (minimalizující míru odchylky ψ) a N3 (minimalizující míru odchylky ξ). Předpokládáme dvoustupňový přepočet hlasů na mandáty podobný tomu, který se aktuálně používá ve volbách do PS PČR. V prvním stupni dochází k alokaci mandátů na volební obvody a ve druhém v jednotlivých volebních obvodech zvlášť k alokaci mandátů jednotlivým politickým subjektům. Metody

Metoda přpočtu	Zkratka	Metoda přpočtu	Zkratka
Haareova kvóta	HA	Dělitel Sainte-Laguë	SL
Hagenbach-Bischoffova kvóta	HB	d'Hondtův dělitel	DH
Droopova kvóta	DK	Modifikovaný dělitel Sainte-Laguë	MSL
Kvóta Imperiali	KI	Posílená kvóta Imperiali	PKI
Dělitel Imperiali	DI	Dánský dělitel	DD
Huntingtonův dělitel	HU	Metoda největšího zbytku	Z

Tabulka 2: Metody přepočtu hlasů na mandáty

přepočtu HA, HB, DK, KI a PKI nemusí nutně vést k alokaci všech mandátů a proto je nutné je doplnit některou ze zbylých metod, jejichž prostřednictvím se potom alokují zbývající mandáty. Naopak metody přepočtu DH, DI, DD, SL, MSL, Z a HU alokují vždy všechny mandáty. Proto je vždy nutné metodu z první skupiny doplnit metodou ze skupiny druhé. Tuto skutečnost značíme symbolem "+". Pokud tedy například metoda Haareovy kvóty je doplněna metodou největšího zbytku, značíme výslednou metodu přepočtu HA+Z.

Protože nejprve dochází k alokaci mandátů na volební obvody a teprve poté na politické subjekty, přičemž použité metody přepočtu nemusí být při těchto dvou alokacích totožné, oddělujeme ve zkráceném zápisu první část (alokace mandátů na volební obvody) od části druhé (alokace mandátů na politické subjekty) znakem "-". Volební systém, který využívá k alokaci mandátů na volební obvody Hagenbach-Bischoffovu kvótu doplněnou metodou největšího zbytku a poté v každém volebním obvodu k alokaci mandátů na politické subjekty d'Hondtovu metodu, bychom označili HB+Z-DH. Protože ale právě tento konkrétní volební systém je aktuálně používán ve volbách do PS PČR označujeme jej výjimečně ACT. Všechny ostatní volební systémy ale již značíme podle popsaného schématu.

Detailní výsledky porovnání měr disproporcionalit jsou uvedeny v tabulkách v dodatku. Protože míra disproporcionality je mimojiné závislá i na počtu volebních obvodů a počtu politických subjektů, které prošly přes uzavírací klauzuli, nelze porovnávat přímo její hodnoty dosažené v různých volbách. Místo toho uvádíme průměrné pořadí (při vzestupném setřídění podle dosažené míry disproporcionality) jednotlivých porovnávaných volebních systémů přes všechny zkoumané volby. V tabulce 3 jsou uvedena průměrná pořadí volebních systémů při zkoumání měr disproporcionality alokace mandátů jednotlivým politickým subjektům, v tabulce 4 průměrná pořadí volebních systémů při zkoumání měr disproporcionality alokace mandátů jednotlivým volebním obvodům a v tabulce 5 průměrná pořadí volebních systémů při zkoumání měr disproporcionality alokace mandátů jednotlivým politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech.

Metoda	ρ	ϕ	ξ
N1	1,00	1,00	1,29
N2	1,00	1,00	1,00
N3	1,00	1,00	1,00
ACT	11,29	11,14	11,14
DH-DH	10,71	10,43	10,57
SL-SL	5,29	5,00	5,29
HA+Z-DH	11,29	11,14	11,14
HU-HU	17,57	17,00	17,57
HA+Z-HU	17,43	17,14	17,43
DD-DD	6,86	6,86	7,29
DD-HU	17,57	17,57	17,57
DD-DI	20,71	20,43	20,71
DD-DH	11,57	11,57	11,43
DH-DI	20,43	20,29	20,43
DI-DI	21,29	21,00	21,29
DK+DH-DK-DH	8,43	9,14	8,86
DK+HU-SL	5,14	4,86	5,00
KI+Z-HA+Z	5,57	5,43	5,86
PKI+DI-PKI-DI	15,57	15,14	15,29
SL-KI+Z	10,43	10,71	10,43
SL-DH	11,71	11,57	11,57
HB+DI-MSL	6,57	5,86	5,86

Tabulka 3: Průměrné pořadí volebních systémů přes všechny analyzované volby do PS PČR (míry disproporcionality alokace mandátů politickým subjektům)

Metoda	ρ	ϕ	ξ
N1	1,00	1,00	1,29
N2	1,00	1,00	1,00
N3	1,00	1,00	1,00
ACT	5,86	5,86	5,86
DH-DH	4,00	4,00	4,00
SL-SL	7,57	7,57	7,57
HA+Z-DH	5,86	5,86	5,86
HU-HU	11,14	11,29	12,14
HA+Z-HU	5,86	5,86	5,86
DD-DD	12,29	12,43	12,14
DD-HU	12,29	12,43	12,14
DD-DI	12,29	12,43	12,14
DD-DH	12,29	12,43	12,14
DH-DI	4,00	4,00	4,00
DI-DI	14,57	14,00	14,86
DK+DH-DK-DH	5,86	5,86	5,86
DK+HU-SL	8,29	7,71	8,00
KI+Z-HA+Z	4,57	4,57	4,57
PKI+DI-PKI-DI	4,00	4,00	4,00
SL-KI+Z	7,57	7,57	7,57
SL-DH	7,57	7,57	7,57
HB+DI-MSL	12,86	12,14	12,43

Tabulka 4: Průměrné pořadí volebních systémů přes všechny analyzované volby do PS PČR (míry disproporcionality alokace mandátů volebním obvodům)

Metoda	ρ	ϕ	ξ
N1	3,14	3,14	4,67
N2	3,14	3,14	4,67
N3	4,17	4,17	3,83
ACT	10,71	10,71	11,00
DH-DH	10,14	10,14	11,00
SL-SL	4,14	4,14	2,17
HA+Z-DH	10,71	10,71	11,17
HU-HU	17,14	17,14	17,17
HA+Z-HU	17,43	17,43	17,83
DD-DD	7,14	7,14	6,83
DD-HU	18,00	18,14	18,33
DD-DI	20,71	20,43	21,00
DD-DH	13,00	13,00	13,83
DH-DI	20,57	20,43	20,83
DI-DI	21,29	21,00	21,17
DK+DH-DK-DH	7,43	7,43	7,67
DK+HU-SL	3,86	3,86	2,67
KI+Z-HA+Z	2,43	2,43	3,50
PKI+DI-PKI-DI	15,43	15,43	15,50
SL-KI+Z	10,43	10,43	10,50
SL-DH	11,43	11,43	11,83
HB+DI-MSL	7,29	7,29	7,00

Tabulka 5: Průměrné pořadí volebních systémů přes všechny analyzované volby do PS PČR (míry disproporcionality alokace mandátů politickým subjektům ve volebních obvodech)

12 Závěr

V textu jsme navrhli tři algoritmy vedoucí k alokaci mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech. Provedli jsme porovnání těchto algoritmů s náhodně vybranými volebními systémy a volebním systémem, který se aktuálně používá a to na datech ze všech historicky konaných voleb do PS PČR a České národní rady od roku 1989 do roku 2011. Naše výsledky ukazují, že navrhované algoritmy využívající metod matematického programování, vedou obecně k nižší míře disproporcionality než všechny volební systémy, s nimiž jsme je porovnávali.

Navržené algoritmy vedou jak k nižší míře disproporcionality alokace mandátů na politické subjekty, tak i k nižší míře disproporcionality alokace mandátů jednotlivým volebním obvodům, než všechny zkoumané alternativní volební systémy. Nezávisí přitom příliš na tom, zda tuto míru disproporcionality měříme pomocí Gallagherova indexu, Loosemore-Hanbyho indexu, nebo Sainte-Laguë indexu. Navíc je zachována uzavírací klauzule a nižší míry disproporcionality tedy není dosaženo na úkor většího počtu stran, které se dostanou do PS PČR.

Kromě alokace mandátů na politické subjekty a alokace mandátů na volební obvody zvlášť, zkoumáme i míru disproporcionality alokace mandátů na jejich kombinaci, tj. na alokaci mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech. Navržené algoritmy i v tomto případě dosahují velice nízkých měr disproporcionality, nikoli však vždy nejnižších ze všech uvažovaných volebních systémů. Důvod pro tuto skutečnost je ten, že někdy je možné dosáhnout nižší míry disproporcionality alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech za cenu vyšší míry disproporcionality alokace mandátů politickým subjektům, nebo vyšší míry disproporcionality alokace mandátů volebním obvodům. Algoritmy byly navrženy tak, aby upřednostňovaly nízkou míru disproporcionality alokace mandátů na politické subjekty, před nízkou mírou disproporcionality alokace mandátů na politické subjekty v jednotlivých volebních obvodech.

Námi provedené důkazy ukazují, že každý ze tří navržených algoritmů vede k optimální alokaci mandátů na politické subjekty, resp. volební obvody z pohledu jemu příslušné míry disproporcionality. Dokazujeme rovněž, že zavedené algoritmy vedou i k minimální možné míře disproporcionality alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech za předpokladu, že jsou dány počty mandátů pro každý politický subjekt i každý volební obvod a za předpokladu, že tato minimální možná míra disproporcionality je dosažena pro nezáporné řešení. Pokud by došlo k tomu, že minimální míry disproporcionality je dosaženo při alokaci záporného počtu mandátů, námi navržené algoritmy vedou obecně pouze k suboptimálnímu nezápornému řešení.

Dva z navrhovaných algoritmů jsou použitelné obecně, jsou dostatečně rychlé a vedou k nalezení jediného řešení. Mohou být, dle našeho mínění, přijaty jako volební sysémy pro volby do PS PČR. Třetí algoritmus je použitelný pouze tehdy, kdy žádný z kandidujících politických subjektů, které prošly přes uzavírací klauzuli, neobdržel v žádném z volebních obvodů nulový počet platných hlasů. Toto omezení však není dáno algoritmem samým, ale mírou disproporcionality (Sainte-Laguë index), kterou minimalizuje.

Reference

[Ben00] Kenneth Benoit. Which electoral formula is the most proportional? a new look with new evidence. *Political Analysis*, 8:381–388, 2000.

[Col71] J. S. Coleman. Control of collectivities and the power of a collectivity to act. *Social Choice, B. Lieberman (ed.)*, pages 269–300, 1971.

[dCMP+87] Pietro Grilli di Cortona, Cecilia Manzi, Aline Pennisi, Federica Ricca, and Bruno Simeone. *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*. Society for Industrial Mathematics, 1987.

[Gal91] M. Gallagher. Proportionality, disproportionality and electoral systems. *Electoral Studies*, 10:33–51, 1991.

[JL71] V. J. Hanby J. Loosemore. The theoretical limits of maximum distortion: Some analytic expressions for electoral systems. *British Journal of Political Science*, 1:467–477, 1971.

[Kar08] Alexander Karpov. Measurement of disproportionality in proportional representation systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 48:1421–1438, 2008.

[Leb06] T. Lebeda. Proporcionalita volebnich formuli pomernych systemu. *Czech Sociological Review*, 42:883–912, 2006.

[Leb09] Tomas Lebeda. *Volebni systemy pomerneho zastoupeni. Mechanismy, proporcionalita a politicke konsekvence*. Nakladatelstvi Karolinum, Prague, 2009.

[Pen98] A. Pennisi. Disproportionality indexes and robustness of proportional allocation methods. *Electoral Studies*, 17:3–19, 1998.

[vol] http://www.volby.cz (date of access: June 2011).

[wik] http://cs.wikipedia.org/wiki/volebn%C3%AD_obvod (date of access: 25. 6. 2011).

13 Dodatek - detailní výsledky porovnání

V této části uvádíme detailní výsledky porovnání měr disproporcionality mezi jednotlivými volebními systémy na datech z jednotlivých voleb do PS PČR.

1990	ρ	ϕ	ξ
N1	0,528	1,226	0,018
N2	0,528	1,226	0,018
N3	0,528	1,226	0,018
ACT	86,899	16,145	1,405
DH-DH	17,278	6,665	0,391
SL-SL	7,695	4,665	0,170
HA+Z-DH	86,899	16,145	1,405
HU-HU	169,776	22,145	3,103
HA+Z-HU	169,776	22,145	3,103
DD-DD	7,326	5,293	0,262
DD-HU	169,776	22,145	3,103
DD-DI	282,187	28,145	5,285
DD-DH	86,899	16,145	1,405
DH-DI	246,816	26,145	4,810
DI-DI	246,816	26,145	4,810
DK+DH-DK-DH	40,021	10,665	0,723
DK+HU-SL	7,695	4,665	0,170
KI+Z-HA+Z	13,653	6,665	0,422
PKI+DI-PKI-DI	169,776	22,145	3,103
SL-KI+Z	86,899	16,145	1,405
SL-DH	86,899	16,145	1,405
HB+DI-MSL	17,278	6,665	0,391

Tabulka 6: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům (Česká národní rada 1990)

1992	ρ	ϕ	ξ
N1	1,028	2,594	0,052
N2	1,028	2,594	0,000
N3	1,028	2,594	0,000
ACT	84,362	19,495	2,451
DH-DH	9,769	7,257	0,438
SL-SL	5,932	5,943	0,324
HA+Z-DH	84,362	19,495	2,451
HU-HU	229,283	29,495	5,478
HA+Z-HU	225,340	29,495	5,233
DD-DD	3,018	4,585	0,160
DD-HU	225,340	29,495	5,233
DD-DI	452,527	44,458	11,428
DD-DH	84,362	19,495	2,451
DH-DI	499,071	46,458	12,524
DI-DI	499,071	46,458	12,524
DK+DH-DK-DH	11,933	8,214	0,460
DK+HU-SL	5,932	5,943	0,324
KI+Z-HA+Z	2,103	3,670	0,121
PKI+DI-PKI-DI	43,295	13,495	1,229
SL-KI+Z	39,636	15,257	1,382
SL-DH	84,362	19,495	2,451
HB+DI-MSL	13,783	9,257	2,451

Tabulka 7: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům (Česká národní rada 1992)

1996	ρ	ϕ	ξ
N1	0,527	1,577	0,017
N2	0,527	1,577	0,017
N3	0,527	1,577	0,017
ACT	32,084	11,577	1,015
DH-DH	39,065	13,577	1,250
SL-SL	3,081	3,768	0,143
HA+Z-DH	32,084	11,577	1,015
HU-HU	107,851	23,577	3,408
HA+Z-HU	127,024	25,577	3,851
DD-DD	6,502	4,833	0,270
DD-HU	127,024	25,577	3,851
DD-DI	451,176	47,577	13,159
DD-DH	32,084	11,577	1,015
DH-DI	407,895	45,577	11,762
DI-DI	436,876	47,577	12,676
DK+DH-DK-DH	5,934	5,048	0,259
DK+HU-SL	3,081	3,768	0,143
KI+Z-HA+Z	3,081	3,768	0,143
PKI+DI-PKI-DI	41,383	13,577	1,376
SL-KI+Z	14,387	7,577	0,572
SL-DH	32,084	11,577	1,015
HB+DI-MSL	4,074	3,768	0,103

Tabulka 8: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům (PS PČR 1996)

1998	ρ	ϕ	ξ
N1	0,469	1,384	0,016
N2	0,469	1,384	0,016
N3	0,469	1,384	0,016
ACT	27,554	11,143	0,817
DH-DH	27,554	11,143	0,817
SL-SL	8,708	5,128	0,199
HA+Z-DH	27,554	11,143	0,817
HU-HU	158,381	27,143	4,397
HA+Z-HU	158,381	27,143	4,397
DD-DD	5,310	4,857	0,143
DD-HU	154,982	27,143	4,377
DD-DI	202,462	31,143	5,633
DD-DH	27,554	11,143	0,817
DH-DI	202,462	31,143	5,633
DI-DI	230,141	33,143	6,495
DK+DH-DK-DH	8,395	5,384	0,250
DK+HU-SL	8,708	5,128	0,199
KI+Z-HA+Z	8,708	5,128	0,199
PKI+DI-PKI-DI	52,081	15,143	1,585
SL-KI+Z	22,922	9,384	0,724
SL-DH	27,554	11,143	0,817
HB+DI-MSL	8,708	5,128	0,199

Tabulka 9: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům (PS PČR 1998)

2002	ρ	ϕ	ξ
N1	0,242	0,792	0,007
N2	0,242	0,792	0,007
N3	0,242	0,792	0,007
ACT	9,477	5,938	0,211
DH-DH	9,477	5,938	0,211
SL-SL	1,511	2,062	0,031
HA+Z-DH	9,477	5,938	0,211
HU-HU	36,500	11,938	0,824
HA+Z-HU	64,377	15,938	1,437
DD-DD	6,153	4,062	0,136
DD-HU	63,749	15,938	1,364
DD-DI	156,333	23,938	3,434
DD-DH	15,995	7,938	0,339
DH-DI	164,961	23,938	3,752
DI-DI	177,589	23,938	4,178
DK+DH-DK-DH	4,119	3,938	0,086
DK+HU-SL	1,724	2,137	0,031
KI+Z-HA+Z	3,096	2,792	0,076
PKI+DI-PKI-DI	41,128	11,938	0,991
SL-KI+Z	15,995	7,938	0,339
SL-DH	15,995	7,938	0,339
HB+DI-MSL	0,870	1,420	0,023

Tabulka 10: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům (PS PČR 2002)

2006	ρ	ϕ	ξ
N1	0,718	1,755	0,031
N2	0,718	1,755	0,031
N3	0,718	1,755	0,031
ACT	122,368	22,014	5,336
DH-DH	122,368	22,014	5,336
SL-SL	12,202	5,755	0,710
HA+Z-DH	122,368	22,014	5,336
HU-HU	318,689	38,014	11,646
HA+Z-HU	315,703	38,014	11,628
DD-DD	22,646	8,488	1,137
DD-HU	345,704	40,014	12,249
DD-DI	675,257	56,014	22,556
DD-DH	122,368	22,014	5,336
DH-DI	714,272	58,014	23,466
DI-DI	714,272	58,014	23,466
DK+DH-DK-DH	22,791	10,014	0,799
DK+HU-SL	12,202	5,755	0,710
KI+Z-HA+Z	4,460	3,755	0,265
PKI+DI-PKI-DI	150,627	24,014	6,680
SL-KI+Z	84,842	18,014	3,786
SL-DH	122,368	22,014	5,336
HB+DI-MSL	14,531	6,514	0,423

Tabulka 11: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům (PS PČR 2006)

2010	ρ	ϕ	ξ
N1	0,316	1,164	0,008
N2	0,316	1,164	0,008
N3	0,316	1,164	0,008
ACT	23,650	9,505	0,657
DH-DH	23,650	9,505	0,657
SL-SL	3,857	3,543	0,084
HA+Z-DH	23,650	9,505	0,657
HU-HU	86,259	19,180	2,475
HA+Z-HU	61,115	15,505	1,727
DD-DD	8,392	4,820	0,252
DD-HU	70,601	17,505	1,909
DD-DI	144,120	23,505	3,958
DD-DH	22,467	9,505	0,626
DH-DI	142,064	23,505	3,868
DI-DI	155,302	25,180	4,336
DK+DH-DK-DH	11,929	6,836	0,297
DK+HU-SL	1,040	1,887	0,031
KI+Z-HA+Z	5,171	3,981	0,129
PKI+DI-PKI-DI	50,392	13,505	1,449
SL-KI+Z	7,781	5,505	0,218
SL-DH	23,650	9,505	0,657
HB+DI-MSL	1,040	1,887	0,031

Tabulka 12: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům (PS PČR 2010)

1990	ρ	ϕ	ξ
N1	2,800	7,375	NA
N2	2,800	7,375	NA
N3	NA	NA	NA
ACT	23,001	19,867	NA
DH-DH	17,930	16,817	NA
SL-SL	16,155	15,816	NA
HA+Z-DH	23,001	19,867	NA
HU-HU	38,273	24,893	NA
HA+Z-HU	38,273	24,893	NA
DD-DD	20,601	17,818	NA
DD-HU	43,239	26,893	NA
DD-DI	58,191	30,473	NA
DD-DH	27,967	21,867	NA
DH-DI	50,155	28,473	NA
DI-DI	47,003	26,588	NA
DK+DH-DK-DH	18,882	17,009	NA
DK+HU-SL	16,155	15,816	NA
KI+Z-HA+Z	16,764	16,175	NA
PKI+DI-PKI-DI	38,273	24,893	NA
SL-KI+Z	23,001	19,867	NA
SL-DH	23,001	19,867	NA
HB+DI-MSL	17,930	16,817	NA

Tabulka 13: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech (Česká národní rada 1990)

1992	ρ	ϕ	ξ
N1	5,445	15,375	3,871
N2	5,445	15,375	3,871
N3	6,159	16,088	3,817
ACT	18,976	24,357	7,551
DH-DH	9,441	19,093	4,313
SL-SL	8,199	18,100	3,842
HA+Z-DH	18,976	24,357	7,657
HU-HU	41,402	34,737	14,044
HA+Z-HU	41,879	35,213	14,102
DD-DD	8,041	17,942	4,031
DD-HU	41,879	35,213	14,102
DD-DI	70,327	47,398	22,267
DD-DH	18,976	24,357	7,657
DH-DI	75,199	49,398	23,694
DI-DI	73,808	49,398	22,124
DK+DH-DK-DH	8,621	18,522	4,127
DK+HU-SL	8,199	18,100	3,948
KI+Z-HA+Z	7,589	17,490	4,041
PKI+DI-PKI-DI	12,778	20,508	5,695
SL-KI+Z	9,996	19,676	4,868
SL-DH	18,976	24,357	7,657
HB+DI-MSL	9,852	19,504	4,490

Tabulka 14: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech (Česká národní rada 1992)

1996	ρ	ϕ	ξ
N1	5,015	12,620	1,773
N2	5,015	12,620	1,773
N3	5,015	12,620	1,773
ACT	7,264	14,869	2,769
DH-DH	8,202	15,807	3,147
SL-SL	4,127	11,732	1,452
HA+Z-DH	7,264	14,869	2,769
HU-HU	19,851	24,650	7,274
HA+Z-HU	22,204	26,650	8,065
DD-DD	4,466	12,071	1,642
DD-HU	22,204	26,650	8,065
DD-DI	68,689	47,662	21,085
DD-DH	7,264	14,869	2,769
DH-DI	62,475	45,662	18,984
DI-DI	65,944	47,662	20,338
DK+DH-DK-DH	4,444	12,049	1,488
DK+HU-SL	4,127	11,732	1,452
KI+Z-HA+Z	4,105	11,710	1,458
PKI+DI-PKI-DI	8,436	16,040	3,729
SL-KI+Z	5,342	12,946	1,835
SL-DH	7,264	14,869	2,769
HB+DI-MSL	4,412	12,017	1,614

Tabulka 15: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech (PS PČR 1996)

1998	ρ	ϕ	ξ
N1	5,027	11,965	1,459
N2	5,027	11,965	1,459
N3	5,280	12,218	1,447
ACT	8,516	15,454	2,246
DH-DH	8,516	15,454	2,246
SL-SL	4,607	11,545	1,265
HA+Z-DH	8,516	15,454	2,246
HU-HU	27,223	28,375	6,773
HA+Z-HU	27,223	28,375	6,773
DD-DD	5,383	12,321	1,411
DD-HU	26,000	28,109	6,781
DD-DI	33,099	31,928	8,994
DD-DH	9,238	16,176	2,388
DH-DI	32,172	31,928	8,652
DI-DI	35,852	33,928	10,094
DK+DH-DK-DH	6,618	13,556	1,733
DK+HU-SL	4,607	11,545	1,265
KI+Z-HA+Z	4,607	11,545	1,265
PKI+DI-PKI-DI	11,372	18,310	3,856
SL-KI+Z	7,805	14,743	2,141
SL-DH	8,516	15,454	2,246
HB+DI-MSL	4,607	11,545	1,265

Tabulka 16: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech (PS PČR 1998)

2002	ρ	ϕ	ξ
N1	6,018	15,295	2,529
N2	6,018	15,295	2,529
N3	6,018	15,295	2,471
ACT	6,384	15,661	2,753
DH-DH	6,384	15,661	2,753
SL-SL	6,532	15,809	2,545
HA+Z-DH	6,384	15,661	2,753
HU-HU	9,048	18,325	3,964
HA+Z-HU	10,614	19,704	4,410
DD-DD	6,644	15,921	2,579
DD-HU	10,238	19,328	4,040
DD-DI	20,523	27,510	7,508
DD-DH	6,858	16,135	2,850
DH-DI	20,900	27,886	7,878
DI-DI	24,077	29,671	8,996
DK+DH-DK-DH	6,287	15,563	2,729
DK+HU-SL	5,851	15,128	2,457
KI+Z-HA+Z	5,805	15,082	2,458
PKI+DI-PKI-DI	9,081	18,358	4,027
SL-KI+Z	6,858	16,135	2,850
SL-DH	6,858	16,135	2,850
HB+DI-MSL	6,922	16,199	2,758

Tabulka 17: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech (PS PČR 2002)

2006	ρ	ϕ	ξ
N1	6,741	18,779	5,227
N2	6,741	18,779	5,227
N3	6,741	18,779	5,003
ACT	16,598	27,381	10,921
DH-DH	16,598	27,381	10,921
SL-SL	7,711	19,748	5,139
HA+Z-DH	16,598	27,381	10,921
HU-HU	31,569	39,076	16,667
HA+Z-HU	30,717	38,898	16,695
DD-DD	8,348	20,385	5,950
DD-HU	32,802	40,854	17,479
DD-DI	59,811	56,354	29,503
DD-DH	15,781	27,337	11,018
DH-DI	61,546	58,089	30,101
DI-DI	68,160	58,089	29,192
DK+DH-DK-DH	8,680	20,718	7,338
DK+HU-SL	7,711	19,748	5,139
KI+Z-HA+Z	7,292	19,329	5,213
PKI+DI-PKI-DI	18,029	28,813	11,931
SL-KI+Z	13,045	24,310	9,534
SL-DH	16,598	27,381	10,921
HB+DI-MSL	8,246	20,283	7,100

Tabulka 18: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech (PS PČR 2006)

2010	ρ	ϕ	ξ
N1	7,097	17,955	2,933
N2	7,097	17,955	2,933
N3	7,097	17,955	2,978
ACT	9,068	19,926	3,722
DH-DH	9,068	19,926	3,722
SL-SL	6,566	17,423	2,918
HA+Z-DH	9,068	19,926	3,722
HU-HU	14,284	25,141	6,402
HA+Z-HU	13,049	23,907	5,530
DD-DD	7,013	17,871	3,351
DD-HU	13,446	24,284	5,795
DD-DI	20,490	30,087	7,917
DD-DH	9,974	20,812	4,047
DH-DI	19,721	29,511	7,780
DI-DI	22,373	30,375	8,387
DK+DH-DK-DH	7,111	17,969	3,100
DK+HU-SL	7,283	18,141	3,059
KI+Z-HA+Z	6,432	17,290	2,955
PKI+DI-PKI-DI	10,029	20,886	4,680
SL-KI+Z	7,556	18,413	3,167
SL-DH	9,068	19,926	3,722
HB+DI-MSL	7,283	18,141	3,059

Tabulka 19: Disproporcionalita alokace mandátů politickým subjektům v jednotlivých volebních obvodech (PS PČR 2010)

1990	ρ	ϕ	ξ
N1	0,888	2,422	0,044
N2	0,888	2,422	0,037
N3	0,888	2,422	0,037
ACT	31,283	13,067	1,016
DH-DH	31,283	13,067	1,016
SL-SL	31,283	13,067	1,016
HA+Z-DH	31,283	13,067	1,016
HU-HU	31,283	13,067	1,016
HA+Z-HU	31,283	13,067	1,016
DD-DD	40,480	15,067	1,351
DD-HU	40,480	15,067	1,351
DD-DI	40,480	15,067	1,351
DD-DH	40,480	15,067	1,351
DH-DI	31,283	13,067	1,016
DI-DI	24,823	12,024	0,866
DK+DH-DK-DH	31,283	13,067	1,016
DK+HU-SL	31,283	13,067	1,016
KI+Z-HA+Z	31,283	13,067	1,016
PKI+DI-PKI-DI	31,283	13,067	1,016
SL-KI+Z	31,283	13,067	1,016
SL-DH	31,283	13,067	1,016
HB+DI-MSL	31,283	13,067	1,016

Tabulka 20: Disproporcionalita alokace mandátů volebním obvodům (Česká národní rada 1990)

1992	ρ	ϕ	ξ
N1	0,367	1,297	0,016
N2	0,367	1,297	0,016
N3	0,367	1,297	0,016
ACT	8,957	6,831	0,294
DH-DH	6,357	4,831	0,185
SL-SL	8,957	6,831	0,294
HA+Z-DH	8,957	6,831	0,294
HU-HU	6,357	4,831	0,185
HA+Z-HU	8,957	6,831	0,294
DD-DD	8,957	6,831	0,294
DD-HU	8,957	6,831	0,294
DD-DI	8,957	6,831	0,294
DD-DH	8,957	6,831	0,294
DH-DI	6,357	4,831	0,185
DI-DI	3,930	4,632	0,167
DK+DH-DK-DH	8,957	6,831	0,294
DK+HU-SL	8,957	6,831	0,294
KI+Z-HA+Z	8,957	6,831	0,294
PKI+DI-PKI-DI	6,357	4,831	0,185
SL-KI+Z	8,957	6,831	0,294
SL-DH	8,957	6,831	0,294
HB+DI-MSL	8,957	6,831	0,294

Tabulka 21: Disproporcionalita alokace mandátů volebním obvodům (Česká národní rada 1992)

1996	ρ	ϕ	ξ
N1	0,410	1,721	0,019
N2	0,410	1,721	0,019
N3	0,410	1,721	0,019
ACT	2,446	3,271	0,092
DH-DH	0,410	1,721	0,019
SL-SL	2,446	3,271	0,092
HA+Z-DH	2,446	3,271	0,092
HU-HU	2,424	3,112	0,087
HA+Z-HU	2,446	3,271	0,092
DD-DD	2,446	3,271	0,092
DD-HU	2,446	3,271	0,092
DD-DI	2,446	3,271	0,092
DD-DH	2,446	3,271	0,092
DH-DI	0,410	1,721	0,019
DI-DI	2,424	3,112	0,087
DK+DH-DK-DH	2,446	3,271	0,092
DK+HU-SL	2,446	3,271	0,092
KI+Z-HA+Z	0,410	1,721	0,019
PKI+DI-PKI-DI	0,410	1,721	0,019
SL-KI+Z	2,446	3,271	0,092
SL-DH	2,446	3,271	0,092
HB+DI-MSL	3,506	3,721	0,175

Tabulka 22: Disproporcionalita alokace mandátů volebním obvodům (PS PČR 1996)

1998	ρ	ϕ	ξ
N1	0,652	2,030	0,027
N2	0,652	2,030	0,027
N3	0,652	2,030	0,027
ACT	2,510	3,488	0,095
DH-DH	2,510	3,488	0,095
SL-SL	2,510	3,488	0,095
HA+Z-DH	2,510	3,488	0,095
HU-HU	2,510	3,488	0,095
HA+Z-HU	2,510	3,488	0,095
DD-DD	3,558	4,536	0,146
DD-HU	3,558	4,536	0,146
DD-DI	3,558	4,536	0,146
DD-DH	3,558	4,536	0,146
DH-DI	2,510	3,488	0,095
DI-DI	5,034	5,402	0,200
DK+DH-DK-DH	2,510	3,488	0,095
DK+HU-SL	2,510	3,488	0,095
KI+Z-HA+Z	2,510	3,488	0,095
PKI+DI-PKI-DI	2,510	3,488	0,095
SL-KI+Z	2,510	3,488	0,095
SL-DH	2,510	3,488	0,095
HB+DI-MSL	2,510	3,488	0,095

Tabulka 23: Disproporcionalita alokace mandátů volebním obvodům (PS PČR 1998)

2002	ρ	ϕ	ξ
N1	0,713	2,779	0,059
N2	0,713	2,779	0,059
N3	0,713	2,779	0,059
ACT	0,713	2,779	0,059
DH-DH	0,713	2,779	0,059
SL-SL	1,545	3,611	0,095
HA+Z-DH	0,713	2,779	0,059
HU-HU	3,059	5,125	0,321
HA+Z-HU	0,713	2,779	0,059
DD-DD	1,545	3,611	0,095
DD-HU	1,545	3,611	0,095
DD-DI	1,545	3,611	0,095
DD-DH	1,545	3,611	0,095
DH-DI	0,713	2,779	0,059
DI-DI	4,273	6,339	0,407
DK+DH-DK-DH	0,713	2,779	0,059
DK+HU-SL	0,713	2,779	0,059
KI+Z-HA+Z	0,713	2,779	0,059
PKI+DI-PKI-DI	0,713	2,779	0,059
SL-KI+Z	1,545	3,611	0,095
SL-DH	1,545	3,611	0,095
HB+DI-MSL	3,119	4,609	0,299

Tabulka 24: Disproporcionalita alokace mandátů volebním obvodům (PS PČR 2002)

2006	ρ	ϕ	ξ
N1	0,834	2,666	0,063
N2	0,834	2,666	0,063
N3	0,834	2,666	0,063
ACT	0,993	2,825	0,070
DH-DH	0,993	2,825	0,070
SL-SL	0,993	2,825	0,070
HA+Z-DH	0,993	2,825	0,070
HU-HU	2,179	4,011	0,135
HA+Z-HU	0,993	2,825	0,070
DD-DD	0,834	2,666	0,063
DD-HU	0,834	2,666	0,063
DD-DI	0,834	2,666	0,063
DD-DH	0,834	2,666	0,063
DH-DI	0,993	2,825	0,070
DI-DI	9,547	9,563	0,745
DK+DH-DK-DH	0,993	2,825	0,070
DK+HU-SL	0,993	2,825	0,070
KI+Z-HA+Z	0,993	2,825	0,070
PKI+DI-PKI-DI	0,993	2,825	0,070
SL-KI+Z	0,993	2,825	0,070
SL-DH	0,993	2,825	0,070
HB+DI-MSL	0,993	2,825	0,070

Tabulka 25: Disproporcionalita alokace mandátů volebním obvodům (PS PČR 2006)

2010	ρ	ϕ	ξ
N1	0,731	2,247	0,047
N2	0,731	2,247	0,047
N3	0,731	2,247	0,047
ACT	2,641	4,157	0,161
DH-DH	2,641	4,157	0,161
SL-SL	2,641	4,157	0,161
HA+Z-DH	2,641	4,157	0,161
HU-HU	4,248	5,695	0,437
HA+Z-HU	2,641	4,157	0,161
DD-DD	5,141	6,157	0,321
DD-HU	5,141	6,157	0,321
DD-DI	5,141	6,157	0,321
DD-DH	5,141	6,157	0,321
DH-DI	2,641	4,157	0,161
DI-DI	6,283	5,921	0,494
DK+DH-DK-DH	2,641	4,157	0,161
DK+HU-SL	6,943	6,157	0,348
KI+Z-HA+Z	2,641	4,157	0,161
PKI+DI-PKI-DI	2,641	4,157	0,161
SL-KI+Z	2,641	4,157	0,161
SL-DH	2,641	4,157	0,161
HB+DI-MSL	6,943	6,157	0,348

Tabulka 26: Disproporcionalita alokace mandátů volebním obvodům (PS PČR 2010)

IES Working Paper Series

2011

1. Roman Horváth, Jakub Matějů : How Are Inflation Targets Set?
2. Jana Procházková, Lenka Šťastná : Efficiency of Hospitals in the Czech Republic
3. Terezie Výprachtická : *The Golden Rule of Public Finance and the Productivity of Public Capital*
4. Martina Mysíková : *Income Inequalities within Couples in the Czech Republic and European Countries*
5. Veronika Holá, Petr Jakubík : *Dopady změn parametrů pojištění vkladů v roce 2008*
6. Vladimír Benáček, Eva Michalíková : *The Factors of Growth of Small Family Businesses: A Robust Estimation of the Behavioral Consistency in the Panel Data Models*
7. Aleš Maršál : *The Term Structure of Interest Rates in Small Open Economy DSGE Model*
8. Robert Flasza, Milan Rippel, Jan Šolc : *Modelling Long-Term Electricity Contracts at EEX*
9. Jan Hlaváč : *Financial performance of the Czech private pension scheme: Its current position and the comparison with other CEE countries*
10. Tomáš Havránek, Zuzana Iršová, Karel Janda : *Demand for Gasoline Is More Price-Inelastic than Commonly Thought*
11. Martina Mysíková : *Personal Earnings Inequality in the Czech Republic*
12. Ondřej Lopušník : *Reflections on the reconciliation problem*
13. Martin Gregor, Lenka Šťastná : *The Decentralization Tradeoff for Complementary Spillovers*
14. Lenka Šťastná, Martin Gregor : *Local Government Efficiency: Evidence from the Czech Municipalities*
15. Andrea Klimešová, Tomáš Václavík : *Pricing of Gas Swing Options using Monte Carlo Methods*
16. António Afonso, Jaromír Baxa, Michal Slavík : *Fiscal developments and financial stress: a threshold VAR analysis*
17. Karel Báťa : *Equity Home Bias Among Czech Investors: Experimental Approach*
18. Karel Janda : *Credit Guarantees and Subsidies when Lender has a Market Power*
19. Roman Horváth : *Research & Development and Long-Term Economic Growth: A Bayesian Model Averaging Analysis*
20. Petr Jakubík : *Household Balance Sheets and Economic Crisis*

21. Josef Brechler, Adam Geršl : *Political Legislation Cycle in the Czech Republic*
22. Jozef Baruník, Lukáš Vácha, Ladislav Krištoufek *: Comovement of Central European stock markets using wavelet coherence: Evidence from high-frequency data*
23. Michal Skořepa : *A convergence-sensitive optimum-currency-area index*
24. Marek Rusnák, Tomáš Havránek, Roman Horváth : *How to Solve the Price Puzzle? A Meta-Analysis*
25. Marián Dinga, Vilma Dingová : *Currency Union and Investment Flows: Estimating the Euro Effect on FDI*
26. Krenar Avdulaj : *The Extreme Value Theory as a Tool to Measure Market Risk*
27. Ivo Jánský, Milan Rippel : *Value at Risk forecasting with the ARMA-GARCH family of models in times of increased volatility*
28. Pavel Ryska, Jan Průša : *Efficiency Wages in Heterogenous Labour Markets*
29. Peter Kukuk, Adam Geršl : *Political Pressure on the National Bank of Slovakia*
30. Jiří Schwarz : *Impact of Institutions on Cross-Border Price Dispersion*
31. Pavel Doležel : *Volební systémy pro volby do Poslanecké sněmovny Parlamentu ČR založené na matematickém programování*

All papers can be downloaded at: http://ies.fsv.cuni.cz

Univerzita Karlova v Praze, Fakulta sociálních věd
Institut ekonomických studií [UK FSV – IES] Praha 1, Opletalova 26
E-mail : ies@fsv.cuni.cz http://ies.fsv.cuni.cz