

FAKULTA SOCIÁLNÍCH VĚD UNIVERZITY KARLOVY
Institut ekonomických studií

MARTIN NETUKA

Nelinearita výnosů cenných papírů

Diplomová práce

1997

Vedoucí diplomové práce: PhDr. Ing. Jiří Fanta

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a všechny použité prameny jsem uvedl v seznamu literatury.

Praha, 30. dubna 1997

.....

Obsah

Úvod.....	1
1. Klasická teorie chování cen na kapitálovém trhu.....	3
1.1 Teorie efektivních trhů	3
1.2 Empirické testy slabé formy tržní efektivnosti.....	6
1.2.1 Autokorelace výnosů	6
1.2.2 Testy ziskovosti nástrojů technické analýzy.....	7
1.3 Rozdělení výnosů	9
1.3.1 Stabilní rozdělení	10
1.3.2 Konečný rozptyl, klesající špičatost	11
2. Teorie chaosu	12
2.1 Fázový prostor a atraktor	13
2.2 Jednoduché chaotické systémy	14
2.2.1 „Stanové“ zobrazení.....	14
2.2.2 Rösslerův systém.....	15
2.2.3 Lorenzův systém	16
2.2.4 Mackey-Glassova rovnice.....	16
2.3 Řád a chaos	17
2.4 Ljapunovův exponent.....	19
2.5 Korelační dimenze	20
2.6 Rekonstrukce stavového prostoru.....	22
2.6.1 Vzájemná informace.....	24
2.6.2 Nepravý nejbližší soused.....	25
2.6.3 Predikce.....	25
2.7 Chaos na kapitálových trzích.....	27
3. Další typy nelineární závislosti	30
3.1 BDS test.....	30
3.2 Nestacionarita.....	32
3.3 Podmíněná heteroskedasticita	33
3.4 Dlouhodobá závislost výnosů.....	36
3.4.1 R/S analýza a Hurstův exponent.....	37
4. Analýza časové řady výnosů akciového indexu	40
4.1 Autokorelace výnosů.....	42
4.2 Časová struktura volatility	43

4.3 Skupinový test náhodnosti	45
4.4 BDS test	45
4.5 Test přítomnosti procesu ARCH v datech	47
4.6 Dlouhodobá paměť výnosů a volatility.....	48
5. Nové teorie kapitálového trhu.....	51
5.1 Hypotéza koherentního trhu.....	51
5.2 Hypotéza fraktálového trhu	55
6. Závěr.....	58
Literatura	59
Příloha	62

Úvod

Snaha pochopit pohyby cen akcií je pravděpodobně stejně stará jako samotný kapitálový trh. Přibližně od šedesátých let ovládala tuto oblast teorie efektivního trhu. Kapitálový trh je podle této teorie stabilní a do cen se rychle promítají všechny informace, které ji mohou ovlivnit. Cenové změny jsou výsledkem reakce na nové informace. Protože nelze nové informace předvídat, jsou cenové změny náhodné. Empirické testy potvrzovaly platnost slabé a polosilné hypotézy efektivního trhu. Teorie implicitně předpokládá, že všichni investoři mají homogenní očekávání, chovají se racionálně a mají jediný investiční horizont. Tyto předpoklady umožňují problém chování cen zjednodušit a použít jednoduché vzorce a pravidla, svou podstatou lineární. Lineární přístup byl v souladu s poznávacím aparátem vědy v daném období.

S rozvojem výpočetní techniky lze pochopit chování systémů, které nebylo pro jejich složitost dříve možné analyzovat, nebo jen za cenu jejich významného zjednodušení. Složité systémy jsou tvořeny velkým počtem jednoduchých složek, které na sebe vzájemně působí a jsou schopny si vyměňovat podněty. Navíc dokáží v reakci na tyto podněty adaptovat svoji vnitřní strukturu. Vztahy mezi složkami jsou nelineární. Složité systémy mohou vytvářet bohatší vzorce chování než systémy lineární. Kapitálový trh je jedním z takových složitých systémů. Obchodníci mají různý investiční horizont a na trh vstupují z různých důvodů. Jedny láká vidina zisku, druzí se chtějí zajistit proti riziku. Všem investorům nejsou vždy dostupné veškeré informace a investoři nejsou vždy jednotní v názoru, jaký vliv má nová informace na cenu. Investoři se nechovají vždy zcela racionálně. Realitu lépe vystihuje koncept omezené racionality a schopnosti průběžně se učit. U složitých systémů je důležitá dynamická složka.

V diplomové práci jsme se zaměřili na vybrané otázky týkající se nelinearity ve výnosech z kapitálových trhů. První část práce je věnována hypotéze efektivního trhu, která je jedním z pilířů klasické teorie kapitálových trhů. Po teoretickém úvodu jsou dále shrnuty výsledky empirických testů slabé formy hypotézy efektivního trhu. Nakonec jsme se věnovali podrobněji rozdělení výnosů, které má vliv na hodnocení empirických testů efektivnosti.

Druhá část se zabývá teorií chaosu. Chaos ovlivnil v posledních třech desetiletích pohled na mnoho oblastí vědy a nevyhnul se ani ekonomii. Protože se však teorie chaosu ještě mezi ekonomy nedostala do širokého povědomí, věnovali jsme více prostoru vysvětlení jejích základních myšlenek. Přítomnost deterministického chaosu nebyla ve výnosech z kapitálového trhu prokázána, neznamená to však, že ve výnosech neexistuje jiný typ nelinearity.

Ve třetí části je popsán neparametrický BDS test, který je testem hypotézy, že náhodné veličiny jsou nezávislé a stejně rozdělené. Jeho výhodou je citlivost na lineární, ale rovněž na nelineární typy

závislosti. Tato vlastnost dříve používaným metodám chyběla, a proto nebylo možné nelineární strukturu v datech odhalit. Dále je pak diskutován problém nestacionarity a podmíněné heteroskedasticity řady výnosů. Nakonec je pozornost věnována dlouhodobé paměti výnosů.

Některé ze statistických postupů, které jsou popsány v předchozích částech, jsme aplikovali na výnosy akciového indexu z amerického kapitálového trhu. Zjištěné výsledky jsou shrnuty ve čtvrté části a shodují se se závěry, k nimž na základě jiných datových souborů došli jiní autoři. K analýze jsme použili tabulkový procesor Excel (verze 5.0) firmy Microsoft a prostředí pro vědeckotechnické výpočty Matlab (verze 4.2c.1) od firmy MathWorks.

V poslední době se objevilo několik pokusů nahradit hypotézu efektivního trhu novou teorií kapitálového trhu, která by zohledňovala výsledky výzkumu v oblasti nelinearity výnosů. V páté části jsme se podrobněji věnovali hypotéze koherentního trhu a hypotéze fraktálového trhu, které jsou takovými prvními pokusy.

V závěrečné části jsme naznačili směry, kterými se výzkum v oblasti nelinearity na kapitálových trzích vyvíjí, a možnosti praktického využití jeho výsledků.

Poznámka: Citace uvedené v poznámkách pod čarou jsou převzaty z literatury uvedené v závěru práce. Osobně jsem s těmito prameny neměl možnost pracovat.

1. Klasická teorie chování cen na kapitálovém trhu

1.1 Teorie efektivních trhů

Primárním úkolem kapitálového trhu je alokace kapitálu v ekonomice. Ideální je trh, který poskytuje přesné signály pro alokaci zdrojů. To znamená, že investoři se rozhodují na základě cen, ve kterých se v každém okamžiku „plně odrážejí“ veškeré dostupné informace. Trh, na kterém se do cen cenných papírů vždy „plně promítají“ veškeré informace, se nazývá efektivní. Tvrzení, že kapitálový trh je efektivní, je jedním z nejčastějších v teorii kapitálových trhů. Tržní efektivita patří mezi základní předpoklady teorie portfolia a modelu oceňování kapitálových aktiv.

Definice, že na efektivním trhu ceny „plně odrážejí“ veškeré dostupné informace, je velmi obecná a nemá žádné důsledky, které by bylo možné empiricky testovat. K tomu je nebytné přesněji specifikovat proces tvorby ceny. Zejména je potřeba přesněji vymezit, co se skrývá pod pojmem „plně odrážejí“. Obvykle se využívá teorie očekávaného výnosu, kterou lze formálně vyjádřit vztahem

$$E(p_{t+1} | \Phi_t) = [1 + E(r_{t+1} | \Phi_t)] \cdot p_t, \quad (1.1)$$

kde E označuje střední hodnotu, p_t je cena cenného papíru v čase t , p_{t+1} je jeho cena v okamžiku $t+1$, r_{t+1} je výnos v období mezi t a $t+1$ a Φ_t je symbol pro množinu informací, o které se předpokládá, že se „plně odráží“ v ceně v t . Ze vztahu (1.1) vyplývá, že informace z Φ_t jsou plně využity ke stanovení rovnovážného očekávaného výnosu, a v tomto smyslu se Φ_t „plně promítá“ do ceny p_t .

Předpoklad, že podmínky rovnováhy na kapitálovém trhu mohou být vyjádřeny pomocí očekávaného výnosu a rovnovážný očekávaný výnos „plně odráží“ informace Φ_t , má významné důsledky. Vylučuje se tím možnost existence obchodní strategie založené na informacích z Φ_t , jejíž očekávaný výnos by byl vyšší než rovnovážný očekávaný výnos. Budiž z_{t+1} rozdíl mezi skutečným výnosem a rovnovážným očekávaným výnosem

$$z_{t+1} = r_{t+1} - E(r_{t+1} | \Phi_t), \quad (1.2)$$

potom

$$E(z_{t+1} | \Phi_t) = 0. \quad (1.3)$$

Vztah (1.3) je definicí „spravedlivé hry“. Posloupnost $\{z_t\}$ je spravedlivá hra vzhledem k posloupnosti informací $\{\Phi_t\}$.

Model efektivního trhu popsany vztahy (1.2) a (1.3) je označován jako model „spravedlivé hry“. Speciálními případy modelu efektivního trhu jsou submartingalový model a model náhodné procházky. Tyto dva modely hrají významnou roli v empirických studiích tržní efektivnosti. Předpokládejme, že platí (1.1) a navíc pro všechna t a Φ_t

$$E(p_{t+1} | \Phi_t) \geq p_t, \quad \text{jinak zapsáno} \quad E(r_{t+1} | \Phi_t) \geq 0. \quad (1.4)$$

Tvrdíme, že posloupnost cen $\{p_t\}$ je submartingal vzhledem k posloupnosti informací $\{\Phi_t\}$, tzn. hodnota ceny v budoucnosti očekávaná na základě informací v Φ_t je větší nebo rovna současné ceně. Submartingalový model má jeden významný důsledek. Uvažujme obchodní strategii, která definuje podmínky, za nichž by měl investor buď držet cenný papír, nebo zaujmout krátkou pozici v tomto cenném papíru a nebo držet hotovost. Jestliže platí (1.4), potom očekávaný výnos této strategie nemůže být vyšší než výnos naivní strategie nákupu a držby cenného papíru. Rovnovážený očekávaný výnos cenného papíru může být záporný a výnos (očekávaný i skutečný) z držby hotovosti je vždy nulový, může nastat situace, kdy očekávaný výnos je vyšší než rovnovážný očekávaný výnos. To je v rozporu s modelem „spravedlivé hry“, který takový případ vylučuje, nikoli však se submartingalovým modelem, jenž nepřipouští pouze existenci obchodního systému založeného na informacích z Φ_t , jehož očekávaný výnos by byl vyšší než výnos z nákupu a držby cenného papíru.

V prvních statích na téma tržní efektivnosti se autoři domnívali, že z tvrzení, že ceny na efektivním trhu „plně odrážejí“ dostupné informace, vyplývá, že po sobě jdoucí výnosy jsou nezávislé. Navíc byl obvykle přijímán předpoklad, že výnosy ve všech obdobích mají stejné pravděpodobnostní rozdělení. Tyto dvě hypotézy tvoří dohromady model náhodné procházky, formálně

$$f(r_{t+1} | \Phi_t) = f(r_{t+1}). \quad (1.5)$$

Podmíněné a marginální pravděpodobnostní rozdělení výnosů jsou stejná. Nadto hustota pravděpodobnosti f musí být stejná pro všechna t . Model náhodné procházky představuje rozšíření modelu „spravedlivé hry“, protože klade přísnější nároky na podmínky na kapitálovém trhu.

Na závěr teoretické části o hypotéze efektivního trhu je vhodné popsat tržní prostředí, které napomáhá nebo naopak brzdí rychlé přizpůsobování cen novým informacím. Snadno lze určit postačující podmínky pro existenci efektivního trhu:

1. Neexistují náklady spojené s obchodováním na kapitálovém trhu.
2. Všechny informace jsou zdarma dostupné všem účastníkům kapitálového trhu.
3. Všichni na trhu se shodují, jaké důsledky budou mít informace na současnou cenu a na rozdělení cen v budoucnosti.

Na takovém trhu současná cena „plně odráží“ všechny dostupné informace. Bohužel reálné kapitálové trhy uvedené podmínky nespĺňujú a existence transakčních nákladů, informací, které znají jen určití investoři, nebo různé hodnocení významu nových informací jsou potenciálními zdroji neefektivnosti kapitálového trhu.

Původní model efektivního trhu říká, že ceny cenných papírů v každém okamžiku „plně odrážejí“ všechny dostupné informace. Toto tvrzení lze považovat za extrémní nulovou hypotézu a nelze předpokládat, že platí doslova. Empirický výzkum v oblasti kapitálového trhu se soustředil na příčpůsobování cen cenných papírů na určitou podmnožinu dostupných informací. V této souvislosti došlo k rozlišení slabé, polosilné a silné formy hypotézy efektivního trhu.¹ Liší se od sebe množinou informací Φ_t , která se promítá do cen. U slabé formy efektivnosti se do cen cenných papírů promítají všechny informace z posloupnosti minulých cen. Pokud platí slabá forma tržní efektivnosti, investoři analyzující minulý vývoj cen by neměli být dlouhodobě schopni dosahovat nadnormálních zisků. Postupy předpovídající vývoj ceny v budoucnosti na základě chování cen v minulosti, úhrnně označované jako technická analýza, nemohou na slabě efektivním trhu dopomoci investorům k nadměrným ziskům. Jestliže platí polosilná forma tržní efektivnosti, ceny na kapitálovém trhu rychle a správně reagují na veškeré veřejně přístupné informace. Do cen se promítá nejen minulý vývoj cen, ale rovněž údaje z finančních výkazů, rozhodnutí o výplatách dividend, oznámení o štěpení akcií, informace z denního tisku apod. Analýza těchto pramenů, označovaná souhrnně jako fundamentální, nepřinese investorům dlouhodobě vyšší než normální zisk. Silná forma je extrémním případem hypotézy efektivního trhu. Ceny na silně efektivním trhu odrážejí všechny informace, veřejné i soukromé, které zná pouze část investorů (např. vedení společnosti).

Je vhodné připomenout, že výzkum cen cenných papírů nebyl reakcí na vývoj teorie tvorby cen na kapitálovém trhu. Naopak impulzem pro rozvoj teorie se staly závěry empirických studií z druhé poloviny padesátých a počátku šedesátých let, ve kterých se většina autorů shodovala, že vývoj cen cenných papírů lze popsat procesem náhodné procházky. Ekonomové cítili povinnost nabídnout teoretické vysvětlení pro výsledky empirických studií. Výsledkem byla hypotéza efektivního trhu, nejprve ve formě náhodné procházky a později obecnější „spravedlivé hry“.

¹ Rozlišení tří úrovní tržní efektivnosti poprvé použil Harry V. Roberts.

Ačkoliv byl jeho přínos téměř šedesát let opomíjen, první testy modelu náhodné procházky zveřejnil Louis Bachelier již v roce 1900.² Formuloval tzv. „fundamentální princip“ pro chování cen: očekávaný zisk spekulantů by měl být nulový. Zájem o chování cen cenných papírů se obnovil až v polovině padesátých let s rozvojem počítačů.

Články a knihy, snažící se dokázat nebo vyvrátit platnost hypotézy efektivního trhu, tvořily významnou část vědeckých studií v oblasti teorie kapitálových trhů v padesátých a šedesátých letech. Ukázalo se, že trhy nejsou silně efektivní, protože investoři, kteří mají přístup k neveřejným informacím, mohou dosahovat dlouhodobě nadnormálních zisků. Výsledky testování polosilné verze tržní efektivity nebyly jednoznačné. Například studie, které analyzovaly reakce cen akcií na oznámení o výplatě dividend nebo na zprávy o hospodářských výsledcích, potvrzovaly, že kapitálový trh je efektivní. Na druhé straně byly odhaleny některé jevy, které jsou v rozporu s teorií, např. akcie malých firem jsou výnosnější než stejně rizikové akcie velkých společností, pondělní výnosy cenných papírů jsou významně nižší než výnosy v ostatních dnech. Výnos z obchodní strategie založené na využití těchto neefektivností může být dlouhodobě vyšší než výnos z naivní strategie nákupu a držby cenných papírů. Podrobněji se zastavíme u metod testování slabé formy tržní efektivity, protože další část této práce lze chápat jako nový pohled na tyto testy. Shrnutí empirických testů polosilné a silné formy hypotézy efektivního trhu lze nalézt například v článku [Fama 1970]. Tato práce a její pokračování³ přináší přehled teoretických i empirických statí o efektivnosti kapitálových trhů.

1.2 Empirické testy slabé formy tržní efektivity

1.2.1 Autokorelace výnosů

Významná část empirických prací o chování cen cenných papírů a konkrétně o modelu náhodné procházky se soustředila na analýzu autokorelační funkce časové řady výnosů cenných papírů. Většina autorů došla k závěru, že ve výnosech neexistuje lineární závislost a zjištěné autokorelace jsou pro všechny hodnoty časového zpoždění v absolutní hodnotě blízko nuly. Někteří sice našli statisticky významnou autokorelaci, kladnou nebo zápornou, zejména pro malé hodnoty zpoždění, ale z ekonomického hlediska nebylo možné s využitím této informace dosáhnout nadnormálního zisku. Nulová autokorelační funkce však není důkazem slabé formy tržní efektivity. Autokorelační funkce „spravedlivé hry“, což je obecnější model efektivního trhu než náhodná procházka, může, ale nemusí být nulová. Na druhé straně ovšem existují nelineární procesy, jejichž autokorelační funkce může být nulová, a přesto lze najít ziskovou obchodní strategii založenou na minulých hodnotách.

² BACHELIER, L.: *Théorie de la Speculation*. Paris, Gauthier-Villars 1900.

³ FAMA, E. F.: *Efficient Capital Markets: II. Journal of Finance*, 46, 1991, s. 1575-1617.

1.2.2 Testy ziskovosti nástrojů technické analýzy

Empirické studie se přesunuly od analýzy autokorelační funkce k jiným metodám testování slabé formy tržní efektivnosti. Snažily se dokázat neziskovost technických indikátorů. Například Sidney Alexander testoval obchodní strategii založenou na principu filtru. Toto jednoduché pravidlo doporučuje nakoupit cenný papír, jestliže jeho cena vzroste alespoň o y % (např. 3 %) a držet jej až do doby, kdy cena klesne nejméně o y %. V tu chvíli je cenný papír prodán a investor zaujme krátkou pozici, ve které zůstane do okamžiku, kdy cena vzroste alespoň o y %. Potom investor uzavře krátkou pozici a nakoupí cenný papír. Cenové pohyby menší než y % se ignorují. Alexander použil denní hodnoty akciových indexů za téměř 60 let a filtry od 1 % do 15 % a doporučil čtenáři „... který není obchodníkem na parketu a musí platit poplatky za zprostředkování obchodu, aby hledal jiný způsob, jak překonat naivní strategii.“⁴ Eugen Fama a Marshall Blume⁵ zkoumali ziskovost strategie na principu filtru pro 30 akcií, které jsou zahrnuty do indexu Dow Jones Industrial Average (DJIA), a podpořili závěry, k nimž dospěl Alexander. Fama a Blume i Alexander shodně zjistili, že pro malé hodnoty filtru (1 %, 1,5 %) je průměrný zisk z jedné transakce velmi malý, avšak transakce jsou tak časté, že celkový zisk v delším období je výrazně vyšší než zisk z naivní strategie. Je však potřeba si uvědomit, že každý obchodník musí platit alespoň minimální poplatky za uskutečňovanou transakci. Protože malé filtry vedou k velkému počtu transakcí, rozplyne se zisk v transakčních nákladech. Zjištění, že malé filtry jsou ziskové, potvrzuje hypotézu, že po sobě jdoucí denní výnosy jsou slabě korelované.

Na konci šedesátých let se odborníci shodovali, že nástroje technické analýzy nemohou na reálných kapitálových trzích přinést vyšší zisk než naivní strategie. Slabá forma hypotézy efektivního trhu byla považována za dokázanou a zájem se přesunul k testům polosilné a silné formy. V otázce schopnosti technické analýzy předpovídat budoucí pohyb na trhu nastal spor. Na jednu stranu se postavila akademická obec, která považovala technickou analýzu za šarlatánství, na druhé straně stáli obchodníci, kteří na základě nástrojů technických indikátorů pravidelně obchodovali a dosahovali dlouhodobě zisku. Postoj akademické obce reprezentuje stanovisko, jež ve své knize zaujal [Malkiel 1990]: „Samozřejmě, že jsem zaujatý proti technické analýze. Mám k tomu nejen osobní, ale i profesionální důvody. Technická analýza je pro akademickou obec anatómie. Rádi ji napadáme. Naše zastrašovací taktika vychází z toho, že myšlenka technické analýzy je evidentně nesprávná a lze ji snadno napadnout. A jestliže se vám zdá, že je zbabělé útočit na něco tak ubohého, uvědomte si: jsou to vaše peníze, které chceme zachránit.“

⁴ ALEXANDER, S.: Price Movements in Speculative Markets: Trends or Random Walks, No. 2. In *The Random Character of Stock Market Prices*. Ed. P. Cootner. Cambridge, MIT Press 1964, s. 351.

⁵ FAMA, E. F. - BLUME, M.: Filter Rules and Stock Market Trading Profits. *Journal of Business*, 39, January 1966, s. 226-241.

Příkladem měnícího se postoje teoretiků k technické analýze od konce osmdesátých let jsou práce [Goldberg - Schulmeister 1988] (dále GS) a [Brock - Lakonishok - LeBaron 1992] (dále BLL). V obou statích dospěli autoři k názoru, že závěry starších studií, které označily technickou analýzu za zbytečnou, byly pravděpodobně předčasné. GS upozornili, že ve starších pracích zabývajících se ziskovostí technických indikátorů byly použity týdenní nebo denní data. GS použili měsíční, denní a hodinová pozorování indexu Standard and Poor's 500 (S&P 500) a testovali populární nástroje technické analýzy, například oscilátor klouzavých průměrů, cenové momentum nebo filtry. Oscilátor klouzavých průměrů ($MAO[k,d]$) je rozdíl dvojice klouzavých průměrů (krátkodobého a dlouhodobého). Jak je zřejmé z názvu, hodnota indikátoru se pohybuje (osciluje) okolo nuly. Signál k nákupu (prodeji) je vydán, jestliže oscilátor protíná nulovou osu zdola (shora). Cenové momentum ($PM[n]$) vyjadřuje rozdíl mezi dnešní cenou a cenou před n obdobími. Návod ke koupi a prodeji je stejný jako u oscilátoru klouzavých průměrů. Testy opakovali pro různé hodnoty parametrů těchto indikátorů. Zjistili, že zejména pro nízké hodnoty parametrů, například $MAO[1,2]$ a $PM[1]$ pro denní data a $MAO[1,8]$ a $PM[5]$ pro hodinová data, je výsledný zisk významně vyšší než z naivní investiční strategie. Obecně byly ziskovější strategie využívající hodinová data než strategie založené na denních údajích. Z uvedené skutečnosti je zřejmé, že význam lineární závislosti výnosů roste s frekvencí dat. Mezi hodinovými výnosy existuje větší lineární závislost než mezi denními. Podle starších studií nelze tuto odchylku od striktní definice slabé formy tržní efektivnosti v praxi využít k dosažení nadnormálního zisku.

GS proto další část své práce věnovali vlivu transakčních nákladů na ziskovost technických indikátorů. Uvědomili si, že náklady spojené s obchodováním se liší na okamžitém trhu, například na newyorské burze (zkr. NYSE), a na trzích s deriváty (například Chicago Mercantile Exchange, zkr. CME). Podle autorů jsou náklady na jednu transakci obchodníka, který není členem NYSE, v průměru 0,42 % z objemu obchodu. Při počtu transakcí, které signalizovaly technické indikátory, byl čistý zisk nižší než zisk z naivní strategie. Situace je o něco příznivější pro členy burzy, kteří průměrně platí pouze 0,025 % z objemu obchodu jako poplatek clearingovému centru. Místem, kde mohou obchodníci používající nástroje technické analýzy, dosáhnout čistého zisku, je trh s deriváty. CME nabízí obchodování s futuritním a opčním kontraktem na index S&P 500. Výhoda obchodů s deriváty spočívá nejen v nižších transakčních nákladech (na CME průměrně 0,025 % z objemu obchodu), ale také v systému záloh, jenž se při obchodování s deriváty používá. Na CME stačí při nákupu futuritního kontraktu složit 10 % jeho ceny. GS souhlasí, že kapitálový trh, tak jak ho vnímali autoři starších prací, je slabě efektivní. Jestliže však vezmeme v úvahu trh s deriváty, lze podle autorů nalézt obchodní strategii založenou na historických cenách, jejíž čistý zisk je vyšší než zisk z naivní strategie. Kapitálový trh v širším slova smyslu tedy není ani slabě efektivní.

Rovněž závěry, k nimž došli BLL lze považovat za obranu technické analýzy a zpochybnění platnosti slabé formy tržní efektivnosti. BLL sledovali ziskovost oscilátorů klouzavých průměrů a

strategie založené na liniích podpory a odporu a použili denní hodnoty indexu DJIA za velice dlouhé období (1897-1986). Autoři použili několik úprav základních indikátorů, jejichž účelem bylo snížení počtu transakcí a tím nákladů na obchodování. Oscilátor klouzavých průměrů vylepšili tím, že okolo nulové hodnoty zavedli pásma a signály k obchodování nebyly vydávány v okamžiku, kdy oscilátor protnul nulovou osu, ale až když vzrostl nad (poklesl pod) vyznačené pásmo. Tím eliminovali falešné signály, kdy krátkodobý průměr osciluje okolo dlouhodobého, a na trhu neexistuje jednoznačný trend. Jiná úprava spočívala v zavedení určitého období po uskutečnění obchodu (například 10 dní), během něhož byly obchodní signály ignorovány. Představme si, že jsme na doporučení oscilátoru nakoupili cenný papír. Budeme ho držet nejméně 10 dní a to i v případě, že například po 5 dnech oscilátor vydá signál k prodeji. Stejně úpravy použili i pro strategii založenou na liniích podpory a odporu. Princip tohoto indikátoru spočívá v tom, že nákupní (prodejní) signál je vydán, jestliže cena vzroste nad (poklesne pod) linii odporu (podpory). Linie odporu (podpory) je definována jako lokální maximum (minimum) ceny za určité období v minulosti.

BLL dospěli k několika zásadním závěrům. S použitím t-testu zjistili, že výnosy v obdobích, která následovala po nákupním signálu, jsou významně vyšší než výnosy v obdobích po prodejním signálu. Tento rozdíl nelze vysvětlit různou úrovní rizika. Naopak volatilita výnosů po nákupním signálu je nižší než volatilita výnosů v obdobích po prodejním signálu. Navíc výnosy po prodejním signálu byly záporné. Chování výnosů, které odhalili BLL, se neshoduje s chováním stochastický procesů, o kterých se dříve uvažovalo jako o modelech výnosů na kapitálových trzích. Podle BLL nemají reálné výnosy rysy ani bílého šumu, ani autoregresního procesu nízkého řádu. Z inverzního vztahu mezi výnosem a rizikem a z asymetrického charakteru výnosů v období dlouhé a krátké pozice se lze podle autorů domnívat, že proces výnosů je ve své podstatě nelineární.

1.3 Rozdělení výnosů

[Fama 1970] označil za poslední otevřenou otázku spojenou s modelem náhodné procházky statistické rozdělení cenových změn (výnosů). Je však třeba si uvědomit, že jde o problém závažný a dokonce zásadní. Charakter rozdělení ovlivňuje jak výběr statistických nástrojů vhodných k testování hypotéz, tak interpretaci získaných výsledků.

Model, ze kterého vyplývá, že výnosy jsou rozděleny normálně, poprvé navrhl Louis Bachelier. Předpokládal, že cenové změny v jednotlivých transakcích jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny s konečným rozptylem. Jestliže jsou transakce v čase přibližně rovnoměrně rozložené a počet transakcí během dne, týdne a měsíce je velmi velký, potom podle centrální limitní věty lze očekávat, že cenové změny budou normálně rozdělené. Autoři studií z padesátých a šedesátých let předpokládali, že jejich empirické výsledky podporují hypotézu normality, ale zároveň většina z nich pozorovala, že

rozdělení neklesalo v okrajových částech exponenciálně, křivka měla mohutné chvosty. Velké cenové změny byly častější, než vyplývá z normálního rozdělení. Tento jev se nazývá leptokurtóza. Francouzský matematik Benoit Mandelbrot navrhl na základě vlastních empirických prací⁶ vysvětlit odchylku od normality obecnější formou Bachelierova modelu. Jestliže nepřijmeme předpoklad, že cenové změny v jednotlivých transakcích mají konečný rozptyl, limitní rozdělení cenových změn je členem třídy stabilních rozdělení, která zahrnuje normální rozdělení jako speciální případ. Ekonomové vesměs Mandelbrotovy závěry nepřijali. Jedním z hlavních důvodů bylo velké množství statistických postupů určených pro práci s normálně rozdělenými veličinami a nedostatek nástrojů pro nenormální stabilní veličiny.

1.3.1 Stabilní rozdělení

Francouzský matematik Lévy definoval třídu rozdělení pravděpodobnosti, jejímiž speciálními případy jsou Cauchyho a normální rozdělení. Rozdělení z této třídy jsou stabilní. Znamená to, že pro jejich distribuční funkci $F(x)$ platí, že pro všechna $b_1, b_2 > 0$ existuje $b > 0$ takové, že

$$F(x/b_1) \cdot F(x/b_2) = F(x/b). \quad (1.6)$$

Stejný vztah platí i pro charakteristickou funkci $\phi(t)$. Ze vztahu (1.6) vyplývá, že všechna tři rozdělení mají stejný tvar, přestože třetí je součinem prvních dvou.

Čtyři parametry $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ určují tvar a vlastnosti stabilního (Lévyho) rozdělení. Parametr δ určuje umístění rozdělení, γ je parametr měřítka. Pro standardizovanou náhodnou veličinu jsou $\gamma = 1$ a $\delta = 0$. Na parametrech α, β závisí tvar rozdělení. Parametr β je parametrem šikmosti. Může nabývat hodnot $-1 \leq \beta \leq 1$. Jestliže $\beta = 0$, rozdělení je symetrické okolo δ . Jestliže je parametr šikmosti menší než nula, rozdělení je záporně zešikmené, kladně zešikmené rozdělení má parametr β větší než nula. Parametr α , charakteristický exponent, určuje špičatost rozdělení okolo δ a mohutnost okrajových částí. Charakteristický exponent nabývá hodnot $0 < \alpha \leq 2$. Jestliže $\alpha = 2$, rozptyl rozdělení je $2 \cdot \gamma^2$. Pokud $\alpha < 2$, druhý moment rozdělení (rozptyl) je nekonečný nebo nedefinovaný. Pro hodnoty $1 < \alpha < 2$ střední hodnota rozdělení existuje, jestliže $\alpha \leq 1$, první moment je také nekonečný.

Speciálními případy Lévyho stabilního rozdělení jsou normální a Cauchyho rozdělení. Normální rozdělení ($\alpha = 2$), jako jediné z rodiny stabilních rozdělení, má konečný rozptyl. Stabilní rozdělení s

⁶ Poutavé, i když spíše populární, vyprávění o Mandelbrotově výzkumu cenových změn na trhu bavlny lze nalézt v [Gleick 1996].

$\alpha = 1$ je Cauchyho rozdělení, které má nekonečnou varianci a střední hodnotu. V tomto případě je δ medián rozdělení a $2 \cdot \gamma$ je mezikvartilové rozpětí.

V ekonomii je obecné stabilní rozdělení vhodnější, než normální například pro popis rozdělení bohatství lidí nebo zisků společností. Ve skutečnosti existuje nepřiměřeně více velmi bohatých lidí než by se dalo očekávat z normálního rozdělení. Bohatí mohou více riskovat a stát se ještě bohatšími. Středně bohatí tuto možnost obvykle nemají a proto narůstá propast mezi nimi a nejbohatšími.⁷

1.3.2 Konečný rozptyl, klesající špičatost

Odhalení mohutných okrajových pásem pravděpodobnostního rozdělení závisí na počtu pozorování. Jestliže není pro analýzu k dispozici dostatek dat, nemusí být široké chvosty objeveny. Tak lze vysvětlit, proč ekonomové, kteří dlouho zkoumali jen týdenní a měsíční řady, pokládali výnosy za normálně rozdělené. Studie analyzující denní [Hsieh 1991] a intradenní [Mantegna-Stanley 1995] výnosy akciových indexů prokázaly, že jejich rozdělení je leptokurtózní. Neexistuje ovšem jednoznačná shoda, o jaké rozdělení se konkrétně jedná. Nejčastěji se uvádějí hypotézy: (1) Lévyho stabilní rozdělení, (2) rozdělení s proměnlivým rozptylem, (3) leptokurtózní rozdělení vzniklé ze směsi rozdělení.

Pokud by byly výnosy rozloženy podle Lévyho stabilního rozdělení, moderní teorie portfolia by dostala vážnou trhlinu. Teorie portfolia, staví na rozptylu (směrodatné odchylce) jako na míře rizika. O výběrovém rozptylu se předpokládá, že konverguje k rozptylu populace. Pokud ovšem rozptyl populace neexistuje, nelze použít výběrový rozptyl jako jeho odhad. Pozornost odborníků se přesunula na okrajová pásma, protože existence momentů je v konečném důsledku určována tempem poklesu chvostů rozdělení. Hustota pravděpodobnosti rozdělení s konečným rozptylem klesá na okrajích exponenciálně, pro rozdělení s nekonečným rozptylem hyperbolicky. Rozdělení výnosů klesají exponenciálně. Rozdělení výnosů akciového indexu S&P 500 v období 1984-89 se v intervalu $\pm 6\sigma$ shoduje s Lévyho stabilním rozdělením s charakteristickým exponentem $\alpha = 1,4$. Mimo tento interval však rozdělení klesá přibližně exponenciálně [Mantegna-Stanley 1995].

Ukazuje se, že čtvrtý moment rozdělení výnosů není konečný. Čím větší počet pozorování, tím větší je špičatost. Pokud zkoumáme ve stejném časovém období výnosy měsíční, týdenní a denní, špičatost postupně roste [Hsieh 1991]. [Mantegna-Stanley 1995] odhadli maximální čas potřebný k pozorování konvergence výnosů ke gaussovskému procesu přibližně na jeden měsíc.

⁷ Problémem rozdělení bohatství ve společnosti se na konci minulého století zabýval italský ekonom Vilfredo Pareto. Proto se někdy používá označení stabilní Paretovo rozdělení nebo Pareto-Lévyho rozdělení.

2. Teorie chaosu

V přírodních vědách po staletí převládalo přesvědčení, že zákonitosti, kterými se řídí jevy okolo nás, jsou ve své podstatě deterministické. Dnešní stav je důsledek minulých stavů a zároveň je to příčina stavů budoucích. Determinismus a predikovatelnost byly pokládány za jedno a totéž. Za jediný důvod, proč se některé úkazy nedařilo předpovídat, byl považován nedostatek relevantních údajů. Počasí je klasickým příkladem systému, který se „vzpíral“ předpovídání. Vědci se však domnívali, že je jen otázkou času, kdy bude na zeměkouli hustá síť meteorologických stanic, které budou dodávat více dat s větší přesností, a k dispozici budou výkonnější počítače, jež budou data zpracovávat. V šedesátých letech dostaly tyto optimistické představy smrtelnou ránu. Některé deterministické systémy, dokonce mnohem jednodušší než počasí, mohou vykazovat náhodné chování a tato náhodnost je fundamentální. To znamená, že nezávisí na množství informací, které máme o systému k dispozici. Pro tuto fundamentální náhodnost se začal používat pojem chaos.⁸ Málo objevů v oblasti přírodních věd upoutalo takový zájem vědců z různých přírodních a společenských oborů i veřejnosti jako teorie chaosu.

Zdánlivým paradoxem je, že chaotické chování je deterministické. Vzniká v systému popsaném pevnými pravidly bez jakéhokoliv prvku náhody, budoucnost je zcela závislá na minulosti. Avšak jakákoliv nejistota, například nepatrná chyba měření, která vstupuje do výpočtu, je během něho exponenciálně zesilována. Důsledkem toho je, že chování systému je krátkodobě předpovídatelné, ale v dlouhém období nepředpovídatelné. Tato vlastnost chaotických systémů se označuje jako citlivá závislost na počátečních podmínkách. Jakákoliv odchylka v počátečních podmínkách bude po několika prvních iteracích stejného řádu jako původní signál. Ed Lorenz, jeden ze zakladatelů teorie chaosu, použil pro citlivou závislost na počátečních podmínkách metaforické označení „efekt motýlího křídla“: mávnutí motýlího křídla v Brazílii vyvolá hurikán v Texasu.

Chaos je nelineární deterministický proces, který „vypadá“ náhodně. To je jedním z důvodů, proč se ekonomové začínají zajímat o tuto oblast. Chaotické chování by mohlo vysvětlit fluktuace v ekonomice a na kapitálových trzích, které jsou dosud obvykle považovány za náhodné.

⁸ Pojem chaos navrhli američtí matematikové Tien-Yien Li a James A. Yorke v článku *Period Three Implies Chaos*. *American Mathematical Monthly*, 82, 1975, s. 985-992. V řeckých mýtech označoval Chaos počátek a pramen všeho na světě. Řekové si ho povětšinou představovali jako nekonečný vesmírný prostor a jako změř prvků beztvare prahmoty v bezmezném temnotě a zosobnili si ho v božskou bytost (ZAMAROVSKÝ, V.: *Bohové a hrdinové antických bájí*. Praha, Mladá fronta 1982, s. 205).

2.1 Fázový prostor a atraktor

Popisujeme-li chování dynamického systému jako funkci jistých proměnných, můžeme tyto proměnné vynést na souřadnicové osy a každému stavu systému přiřadit takový bod v prostoru, který odpovídá hodnotám příslušných proměnných. Takovému prostoru se pak říká fázový (stavový) prostor. Fázový prostor umožňuje proměňovat číselné údaje v geometrické útvary. Ve stavovém prostoru se celková informace o dynamickém systému v určitém okamžiku redukuje na bod. Pohybující se bod zachycuje vývoj systému v čase a dráha bodu ve stavovém prostoru se nazývá trajektorie (orbita). Zobrazení dynamických systémů pomocí fázového prostoru vystavilo lidskému oku jinak nepozorovatelné vzorce chování. Pro nelineární dynamické systémy jde obvykle o jediný vhodný a názorný způsob popisu pohybu. Vědec má při pohledu na stavové zobrazení možnost dopracovat se pomocí vlastní představivosti k systému samotnému: taková a taková smyčka odpovídá té a té periodicitě, tento obrat značí takovou a takovou změnu, tento prázdný prostor je výrazem té a té vyloučené možnosti.

U velice jednoduchého dynamického systému typu kyvadla má stavový prostor tvar obdélníku. K určení stavu, ve kterém se kyvadlo nachází, stačí dvě proměnné: okamžitá poloha (úhel) a okamžitá rychlost. Stavový prostor musí být proto dvourozměrný. Každá součást dynamického systému schopná nezávislé změny je další proměnnou, dalším stupněm volnosti. Ve fázovém prostoru vyžaduje každý stupeň volnosti další souřadnici, aby bylo zajištěno, že bod bude obsahovat dostatek informací pro jednoznačné určení stavu systému. Systémy s nekonečným počtem stupňů volnosti vyžadují stavový prostor s nekonečně dimenzemi.

V krátkém období může být systém ve stavu, který odpovídá jakémukoli bodu ve stavovém prostoru. Důležitější je však určit dlouhodobé chování systému, kdy je závislost na počátečních podmínkách zanedbatelná. Množina bodů ve fázovém prostoru odpovídající dlouhodobému ustálenému chování systému se nazývá atraktor. Pojem atraktor vyjadřuje, že všechny trajektorie, které jsou dostatečně blízko, jsou k atraktoru přitahovány (angl. attract). Dvěma jednoduššími typy atraktoru jsou limitní cyklus a pevný bod značící neustále se opakující chování, respektive stacionární stav. Uvažujme kyvadlo, které nepodléhá tření. Jestliže ho uvedeme do chodu, bude se kývat s konstantní frekvencí a amplitudou. Ve stavovém prostoru bude atraktorem ideálního kyvadla kružnice (limitní cyklus). Opustíme-li předpoklad neexistence tření, kyvadlo se stane disipativním systémem a změní se jeho atraktor. Pokud kyvadlo spustíme, bude se v důsledku tření postupně zmenšovat rychlost i amplituda a nakonec se kyvadlo ustálí ve stavu s nulovou rychlostí i amplitudou. Ve fázovém prostoru odpovídá takovému chování trajektorie, která se spirálovitě zavíjí a skončí v bodě $[0,0]$. Tento pevný bod představuje atraktor reálného kyvadla. Výzkum v oblasti teorie chaosu vedl k objevu třetího typu

atraktoru, tzv. podivného atraktoru (angl. strange attractor).⁹ Podivný atraktor je vzorec, který charakterizuje ustálený stav chaotických systémů. Je to místo, kde se nevyhnutelně setkává teorie chaosu a fraktály, protože každý podivný atraktor je fraktálem a jako dynamický objekt je podivný atraktor chaotický.

Fraktál (z lat. fractus - zlomený) je množina, jejíž Hausdorffova (fraktálová) a topologická dimenze jsou různé. Místo pojmu topologická dimenze se v běžném životě říká počet rozměrů. Hausdorffova dimenze je zobecněním pojmu dimenze topologické. U jednoduchých geometrických útvarů je Hausdorffova dimenze číselně rovna topologické, proto například čtverec nebo koule mezi fraktály nepatří. Příkladem fraktálu je Kochova křivka. Její délka je nekonečná, zatímco její plocha je nulová. Topologická dimenze je rovna jedné, ale Hausdorffova dimenze je 1,26. Je to „něco mezi“ čarou a plochou. Jednou ze základních vlastností fraktálů je soběpodobnost, to znamená, že jsou invariantní vůči změně měřítka.

2.2 Jednoduché chaotické systémy

2.2.1 „Stanové“ zobrazení

Jedním z nejjednodušších nelineárních systémů, který může vykazovat chaotické chování je „stanové“ zobrazení (z angl. tent map). Počáteční bod x_0 se volí z intervalu $(0, 1)$. Posloupnost hodnot x_t se generuje podle vzorce

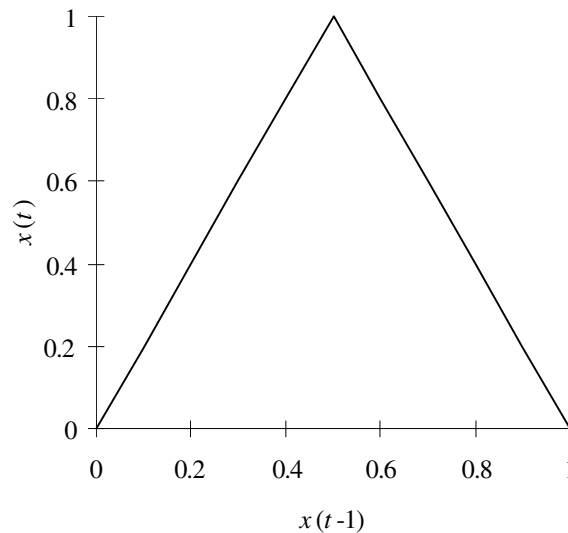
$$\begin{aligned} x_t &= 2 \cdot x_{t-1} && \text{pro } x_{t-1} \leq 0,5 \\ x_t &= 2 \cdot (1 - x_{t-1}) && \text{pro } x_{t-1} > 0,5. \end{aligned} \tag{2.1}$$

„Stanové“ zobrazení dostalo název podle grafu na obrázku 1, který připomíná stan. Má několik zajímavých vlastností, z nichž některé upoutají pozornost odborníka studujícího pohyby cen na kapitálovém trhu:

1. Jestliže $t \rightarrow \infty$, posloupnost hodnot x_t vyplní rovnoměrně interval $(0, 1)$.
2. Libovolně malá chyba měření počáteční hodnoty x_0 bude v předpovědích x_t exponenciálně růst.

⁹ Dvojice matematiků David Ruelle a Floris Takens použila toto spojení poprvé v článku On the Nature of Turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20, 1971, s. 167-192. Ruelle říká, že mu spojení „podivný atraktor“ připadalo psychologicky „sugestivní“ [Gleick 1996].

3. Autokorelační funkce ρ_k je pro všechna zpoždění $k > 0$ rovna nule pro skoro všechny počáteční podmínky x_0 . Na základě zkoumání korelogramu klasifikujeme proces jako stochastický (bílý šum), ačkoliv se ve skutečnosti jedná o deterministický proces.
4. Posloupnost částečných součtů řady x_t může nejprve pomalu růst a náhle prudce klesnout.



Obrázek 1 „Stanové“ zobrazení.

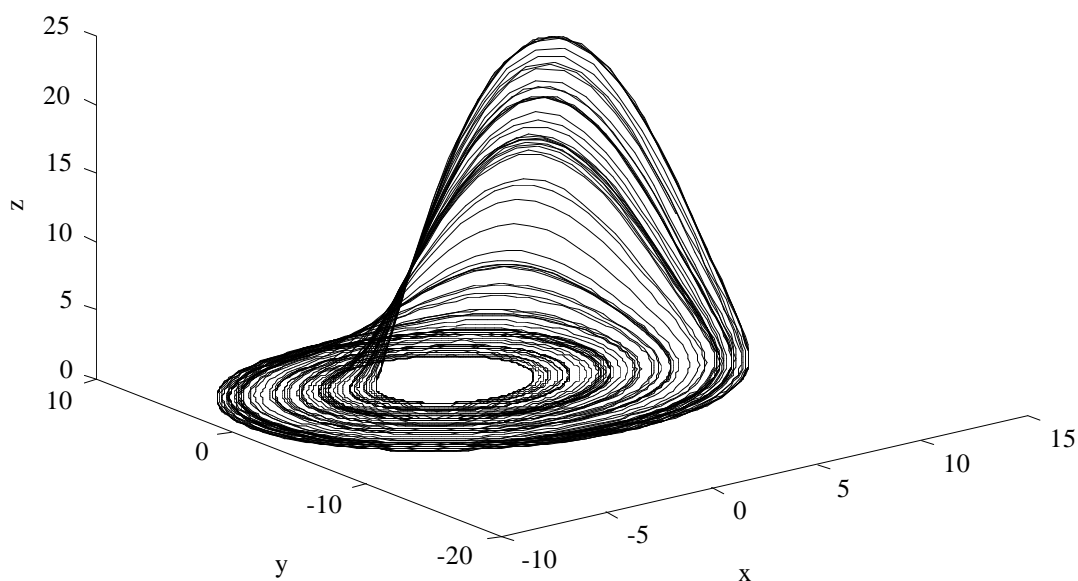
2.2.2 Rösslerův systém

Pravděpodobně nejjednodušší spojitý systém, který může vykazovat chaotické chování, popsal v roce 1976 ve svém článku Otto E. Rössler [Rössler 1976]. Tento Němec, původním povoláním lékař, se k chaosu dostal přes chemii a teoretickou biologii. Systém je popsán třemi diferenciálními rovnicemi

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -(y + z) \\
 \dot{y} &= x + a \cdot y \\
 \dot{z} &= b + x \cdot z - c \cdot z,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

kde a , b , c jsou parametry, které řídí chování systému. V celém systému je pouze jediný nelineární člen ($x \cdot z$ ve třetí rovnici). Hodnoty parametrů jsou $a = 0,2$ a $b = 0,2$. Změnou hodnoty parametru c lze významně ovlivnit chování systému [Rössler 1976].

Pro libovolné počáteční souřadnice (x_0, y_0, z_0) definuje systém právě jednu trajektorii. Jestliže ji vyneseme do trojrozměrného prostoru se souřadnicemi (x, y, z) a sousední body propojíme, objeví se nám před očima Rösslerův atraktor připomínající Möbiův proužek (obrázek 2). Jedná se skutečně o atraktor, protože pro jiný počáteční bod dostaneme stejný výsledek. Fraktální dimenze atraktoru zobrazeného na obrázku je přibližně 2,01, proto Rösslerův atraktor patří mezi podivné.



Obrázek 2 Rösslerův atraktor. Parametr $c = 5,7$.

2.2.3 Lorenzův systém

Stanové zobrazení nebo Rösslerův systém jsou účelově vytvořené velmi jednoduché dynamické systémy, na nichž lze názorně demonstrovat znaky chaotického chování. Lorenzův systém¹⁰, který byl publikován 13 let před Rösslerovým, je také příkladem chaotického systému, ale je inspirován reálným jevem. Jde o model zvláštního druhu proudění v kapalinách a plynech, které se nazývá termální konvekce. Lorenzův systém je také popsán trojicí diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \sigma \cdot (y - x) & \sigma &= 10 \\
 \dot{y} &= -y - x \cdot z + R \cdot x & R &= 28 \\
 \dot{z} &= x \cdot y - B \cdot z & B &= 8/3.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

2.2.4 Mackey-Glassova rovnice

Předcházející chaotické systémy generují nízkodimenzionální chaos, což znamená, že nelineární struktura je snadno odhalitelná. Existují však rovněž vysokodimenzionální chaotické systémy, které není jednoduché rozpoznat, například v [Mackey-Glass 1977]. Mackey-Glassova rovnice je diferenciální

¹⁰ LORENZ, E. N.: Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 1963, s. 130-141.

rovnice se zpožděním a autoři ji použili k modelování mechanismu tvorby červených krvinek v kostní dřeni. Složitě dynamické chování způsobuje člen se zpožděním v diferenciální rovnici.

$$\dot{x}(t) = \frac{a \cdot x(t-c)}{1 + x^{10}(t-c)} - b \cdot x(t) \quad a = 0,2, b = 0,1, c = 50 \quad (2.4)$$

Obecně lze chaotické systémy popsat deterministickým vztahem

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots). \quad (2.5)$$

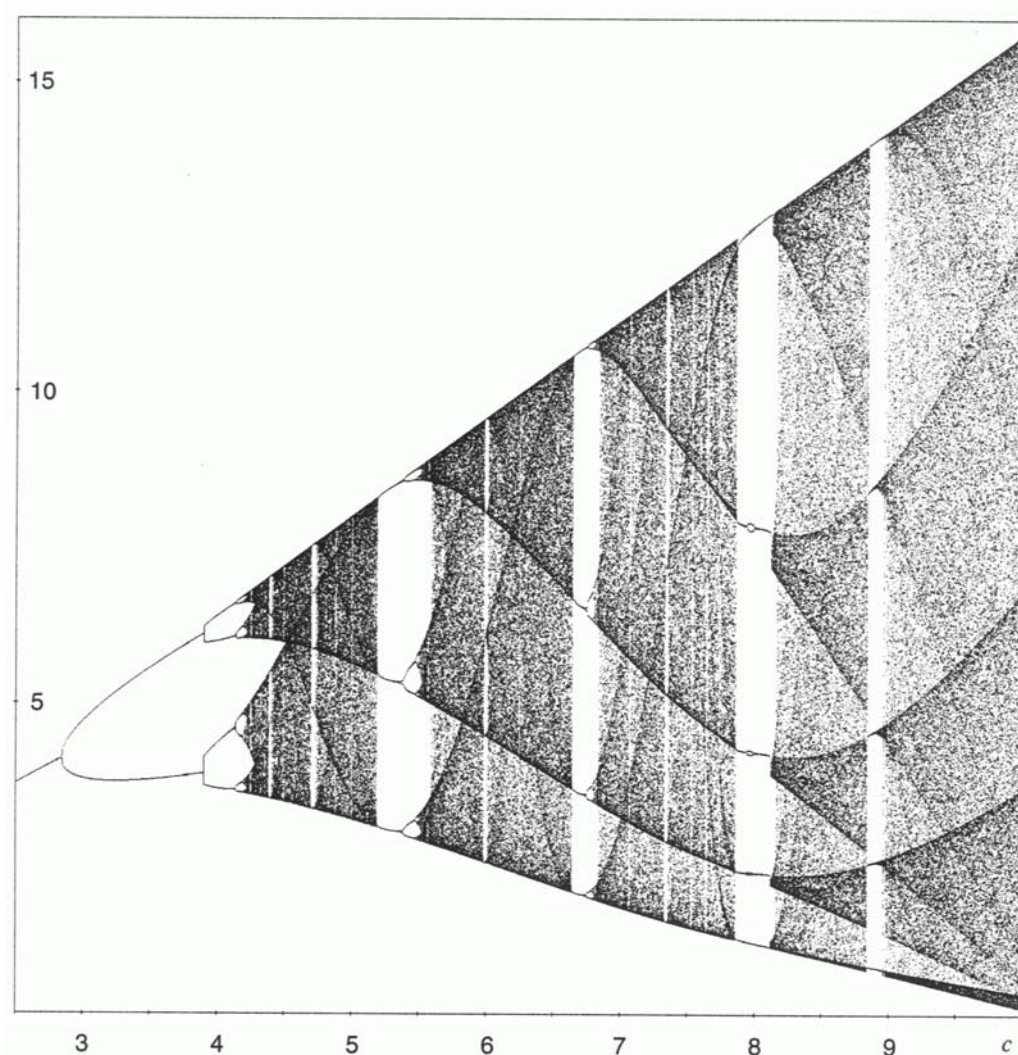
Zde x_t může být skalár nebo vektor. Pokud má systém vykazovat chaotické chování, funkce f musí být nelineární. Nelinearita funkce je pro chaos podmínkou nutnou, nikoliv postačující. Mnoho nelineárních funkcí chaos negeneruje.

2.3 Řád a chaos

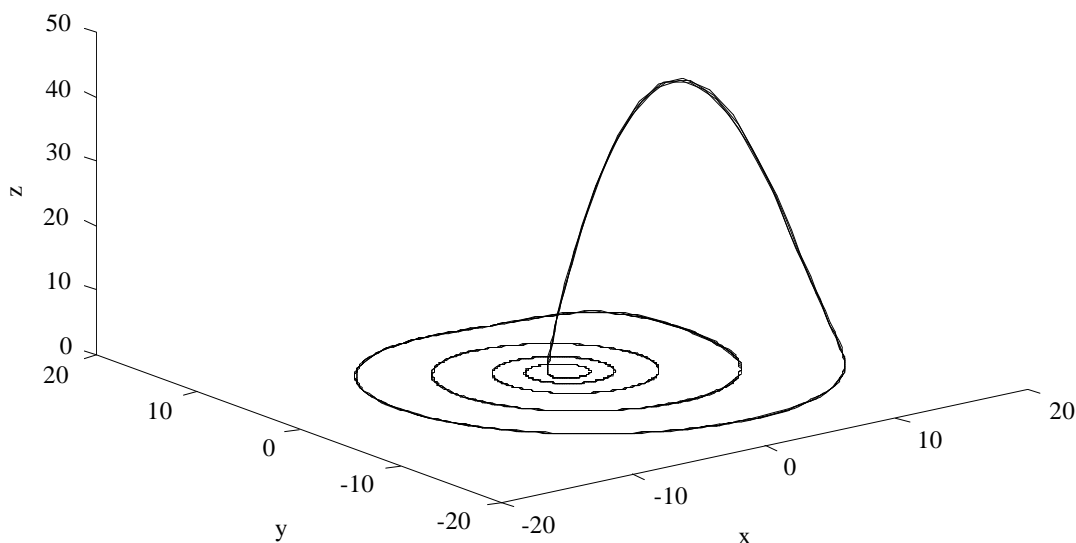
Řád a chaos byly po dlouhou dobu chápány jako protiklady. Představa byla taková, že řád existuje tam, kde platí jednoduché zákonitosti, a chaos vládne v oblastech, kde nelze žádné zákonitosti, jednoduché nebo komplikované, nalézt. Jinými slovy, chaos nebyl vnímán jako složitější forma řádu, ale jako stav, kde žádné zákonitosti neplatí. Významným výsledkem teorie chaosu bylo zjištění, že řád a chaos jsou dva stavy jednoho systému, který může poměrně snadno přecházet z jednoho do druhého. V přírodě lze nalézt bezpočet takových systémů. Například proudění kapaliny může být laminární (uspořádané) a za jiných podmínek může stejná kapalina proudit turbulentně (chaoticky). Jiným příkladem je lidské srdce. Pravidelný srdeční rytmus představuje řád, rytmus fibrilujícího srdce je chaotický. Pravděpodobně ještě zajímavější než fakt, že řád a chaos se řídí jediným pravidlem, byl objev velmi dobře definované „cesty“, která tyto dva stavy spojuje. Během přechodu od uspořádanosti k chaosu dochází v systému ke kvalitativním změnám, nazývaným bifurkace. Navíc se ukázalo, že tato cesta je univerzální, což znamená, že bifurkace lze nalézt v různých teoretických i reálných systémech. Graficky se cesta od uspořádanosti k chaosu zobrazuje ve formě Feigenbaumaova diagramu. Název připomíná amerického fyzika Mitchella Feigenbauma, který je autorem myšlenky o univerzalitě cesty mezi řádem a chaosem.

Myšlenku přechodu od řádu k chaosu lze demonstrovat na příkladu Rösslerova systému, který jsme popsali v odstavci 2.2.2. Zmínili jsme se, že hodnota parametru c významně ovlivňuje chování Rösslerova systému. Jestliže $c = 5,7$ chová se systém chaoticky a atraktor systému je podivný. Na obrázku 3 je Feigenbaumův diagram pro Rösslerův systém, v kterém je shrnuto chování systému pro hodnoty $2,5 < c < 10$. Pro nízké hodnoty c je atraktorem limitní cyklus ve tvaru jednoduché smyčky. Pro hodnoty vyšší než 3 dochází ke zdvojení period a cyklus se skládá postupně ze dvou, čtyř, osmi atd.

smyček. Okolo hodnoty $c = 4,4$ se systém začíná chovat chaoticky. Ve Feigenbaumově diagramu se to projevuje tmnými pásmy. Cesta mezi řádem a chaosem není jednosměrná a systém může přejít z chaosu zpět do uspořádaného stavu. Ve Feigenbaumově diagramu jsou zřejmé bílé pásy, které přerušují oblasti s chaotickým chováním. Pro odpovídající hodnoty c je atraktorem opět limitní cyklus. Například pro hodnotu $c = 8$ je v diagramu pět bodů, kterým odpovídá atraktor složený z pěti smyček (viz obrázek 4). V příloze této práce je uveden program pro prostředí Matlab, který dokáže generovat atraktor Rösslerova systému pro různé hodnoty parametru c .



Obrázek 3 Feigenbaumův diagram pro Rösslerův systém. Parametr c nabývá hodnot z intervalu $(2,5, 10)$. Na vertikální ose jsou absolutní hodnoty minim proměnné x odpovídající trajektorie atraktoru. Převzato z [Peitgen et al. 1992].



Obrázek 4 Trajektorie atraktoru Rösslerova systému pro $c = 8$.

2.4 Ljapunovův exponent

Základní vlastností chaotických systémů je citlivá závislost na počátečních podmínkách. Tento fakt brání konstrukci dlouhodobých předpovědí. Měřítkem citlivé závislosti na počátečních podmínkách je Ljapunovův exponent.¹¹ Vyjadřuje průměrný růst nekonečně malé chyby v počátečním bodě x_0 a je definován

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \cdot \ln \left(\| D f^t(x_0) \otimes v \| \right), \quad (2.6)$$

kde D je derivace podle počátečních podmínek x_0 , \otimes maticový součin, v směrový vektor, f^t t -tá iterace funkce f a $\| \|$ norma matice [Brock 1993]. Pro každou dimenzi chaotického systému existuje jeden Ljapunovův exponent. Přesto se obvykle hovoří o Ljapunovově exponentu v jednotném čísle a má se na mysli největší z nich, který nejvíce ovlivňuje dlouhodobé chování systému. Chaotický systém musí mít alespoň jeden Ljapunovův exponent kladný, alespoň v jednom směru se od sebe musí sousední trajektorie atraktoru exponenciálně vzdalovat. Například „stanové“ zobrazení má největší Ljapunovův exponent roven $\ln 2$. Pro stabilní systém, jehož atraktorem je pevný bod, jsou všechny Ljapunovovy

¹¹ Název připomíná vynikajícího ruského matematika Alexandra Michajloviče Ljapunova.

exponenty záporné, pro atraktor typu limitní cyklus je největší exponent roven přesně nule a ostatní jsou záporné.

Výpočet Ljapunovova exponentu z empirických dat není triviální. Problém nespočívá ve složitosti výpočtu, ale spíše v nárocích na počet pozorování. Metoda výpočtu Ljapunovova exponentu vyvinutá Alanem Wolfem je založena na sledování vzdálenosti sousedních trajektorií ve stavovém prostoru.¹² Algoritmus vyhovuje pro chaotické systémy nízkých dimenzí. Wolf tvrdí, že pro jednu trajektorii je potřeba alespoň 30 bodů a nejméně 30^d bodů pro systém s dimenzí d [Vaga 1994]. K určení Ljapunovova exponentu Lorenzova systému (dimenze 2,05) stačí přibližně 900 bodů, avšak pro systém dimenze 4 je nutných téměř milion pozorování.

Nízká korelační dimenze a kladný největší Ljapunovův exponent jsou znaky chaotických systémů, nejsou to ovšem statistické testy chaosu. Doposud nejsou známa asymptotická pravděpodobnostní rozdělení korelační dimenze a Ljapunovova exponentu, nelze proto určit věrohodnost odhadů získaných z konečného počtu pozorování. Statistické testy nelinearity (BDS test apod.) nedokážou odlišit chaos od jiných procesů, které nejsou nezávislé a stejně rozdělené. Kvalita předpovědí získaných s použitím nelineárních predikčních metod může odpovědět na otázku, pocházejí-li data z deterministického nebo stochastického procesu. Chaotické systémy jsou deterministické a lze poměrně přesně předpovídat jejich chování v nejbližší budoucnosti. Přesnost předpovědí v čase exponenciálně klesá.

2.5 Korelační dimenze

Prostým porovnáním korelogramů dat vygenerovaných ze „stanového“ zobrazení a dat bílého šumu nelze rozhodnout, který systém je deterministický a který stochastický. Je potřeba použít jiné postupy. Jedna z metod staví na skutečnosti, že pozorování pocházející z chaotického systému zcela „nevypĺňuje“ vícerozměrný prostor. Mějme dvě množiny dat: x_t byla vygenerována „stanovým“ zobrazením a y_t je náhodná veličina rovnoměrně rozdělená na intervalu (0, 1). Jestliže vyneseme hodnoty x_t na přímkou, jsou rovnoměrně rozděleny mezi 0 a 1, zapĺňují stejně prostoru jako y_t . Předpokládejme nyní dvourozměrné vektory (x_t, x_{t-1}) a (y_t, y_{t-1}) . Jestliže je vyneseme do dvourozměrného grafu, data ze „stanového“ zobrazení vytvoří graf z obrázku 1, data z rovnoměrně rozdělené náhodné veličiny rovnoměrně rozmístěna v jednotkovém čtverci. Jinými slovy, data z chaotického systému nechají ve dvourozměrném prostoru velké „díry“. Jestliže je chaotický proces složitější, bylo by nutné stejný postup

¹²Počítačový program pro výpočet největšího Ljapunovova exponentu pro operační systém MS-DOS lze získat v síti Internet na adrese <http://www.users.interport.net/~wolf/chaos/lyap.exe>. Soubor docs.exe ve stejném adresáři obsahuje dokumentaci k programu.

opakovat pro vyšší dimenzi. Grafická metoda je velmi intuitivní, ale nepraktická. Grassberger a Procaccia přišli s pojmem korelační dimenze.¹³

Výpočet korelační dimenze probíhá v několika krocích. Nejprve je nutné z dat odstranit autokorelaci. Používá se autoregrese, pro určení délky zpoždění je vhodné kritérium AIC (z angl. Akaike's Information Criterion) nebo BIC (z angl. Bayesian Information Criterion) [Green 1990]. Z upravených dat se sestaví m -tice:

$$\begin{aligned} x_t^1 &= x_t \\ x_t^2 &= (x_t, x_{t+1}) \\ &\vdots \\ x_t^m &= (x_t, \dots, x_{t+m-1}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tato m -tice je bodem v m -rozměrném prostoru, m se nazývá dimenze vnoření (angl. embedding dimension). Vypočte se korelační integrál

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{(t, s), 0 < t, s < N: \|x_t^m - x_s^m\| < \varepsilon\}}{N^2} \quad (2.8)$$

Korelační integrál je definován jako část dvojic x_s^m a x_t^m , které jsou „blízko“ sebe ve smyslu

$$\max_{k=0, \dots, m-1} \{|x_{s-k} - x_{t-k}|\} < \varepsilon \quad (2.9)$$

Spočítáme sklon grafu $\ln C_m(\varepsilon)$ na $\ln \varepsilon$ pro malá ε . Přesněji chceme vypočítat v_m

$$v_m = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln C_m(\varepsilon) / \ln \varepsilon \quad (2.10)$$

Jestliže v_m neroste s m , pocházejí data z chaotického procesu. Grassberger-Procacciova korelační dimenze je definována jako

$$v = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m. \quad (2.11)$$

Korelační dimenze je indikátorem složitosti systému. Lze ji považovat za odhad počtu stupňů volnosti. S použitím uvedené metody byly stanoveny korelační dimenze jednoduchých chaotických systémů: „stanové“ zobrazení $v = 1$, Lorenzův systém $v = 2,05$, Mackey-Glassova rovnice $v = 7,5$. Korelační dimenze měří kolik prostoru je „vyplněno“ daty a nemusí být nutně celočíselná. Korelační

¹³ GRASSBERGER, P. - PROCACCIA, I.: Characterization of strange attractors. *Physics Review Letters*, 50, January 1983, s. 346-349.

dimenze nesouvisí s počtem proměnných systému. Například Mackey-Glassova rovnice je chaotický systém jedné proměnné, ale korelační dimenze je 7,5. Korelační dimenze náhodného procesu je ∞ .

2.6 Rekonstrukce stavového prostoru

Jestliže zkoumáme určitý reálný jev, například mechanismus tvorby ceny cenného papíru na kapitálovém trhu, nemáme k dispozici rovnice, kterými se jev řídí. Často neznáme ani všechny veličiny, na nichž závisí chování systému. Přesto zůstává jedním z nejdůležitějších úkolů určit, o jaký typ dynamického systému se jedná. Většinou můžeme sledovat hodnoty nějaké proměnné, která představuje výstup studovaného systému. Na kapitálovém trhu je to cena nebo výnos cenného papíru. Zjištěné údaje vytvářejí časovou řadu s_0, s_1, s_2 atd. Jedním z nejzajímavějších výsledků teorie chaosu je možnost rekonstruovat atraktor, pokud existuje, z výstupní posloupnosti. Pokud data pochází z deterministického systému, jejich vývoj se řídí určitým pravidlem a s_k je determinováno

$$s_k = \psi(s_{k-1}, s_{k-2}, \dots), \quad (2.12)$$

kde ψ označuje nějakou, dosud neznámou, transformaci. Vysvětleme si podstatu rekonstrukce stavového prostoru na konkrétním příkladě.

Považujme nyní Rösslerův systém za skrytý v černé skřínce. Pozorování provádíme tak, že v pravidelných intervalech τ sledujeme hodnoty proměnné x (viz obrázek 5a). Zvolíme délku časového kroku (angl. time delay) T (celistvý násobek τ) a vytvoříme posloupnost vektorů

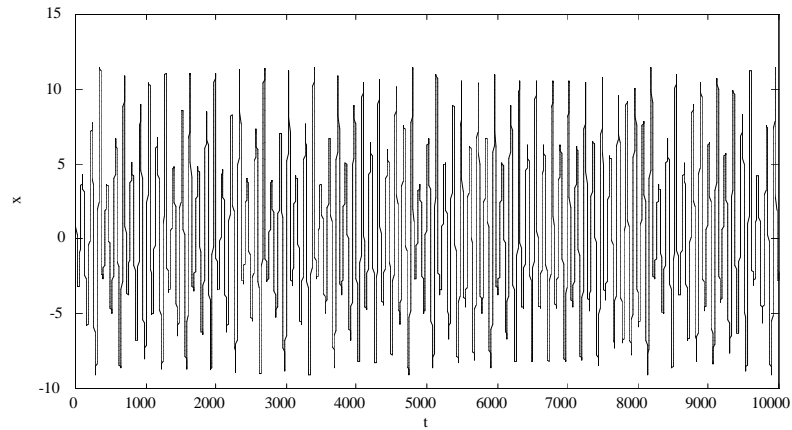
$$\begin{aligned} &(x(0), x(T), x(2T)) \\ &(x(\tau), x(\tau + T), x(\tau + 2T)) \\ &(x(2\tau), x(2\tau + T), x(2\tau + 2T)) \\ &\vdots \\ &(x(k\tau), x(k\tau + T), x(k\tau + 2T)). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Zakreslením těchto bodů do třírozměrného prostoru a jejich pospojováním dostaneme obrázek 5b. Na první pohled je zřejmé, že základní rysy Rösslerova atraktoru zůstaly zachovány.

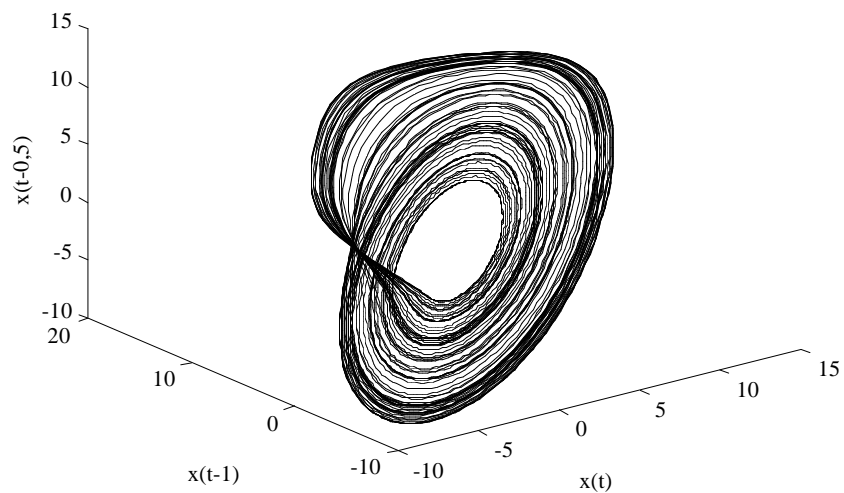
Touto metodou lze vždy úspěšně zrekonstruovat podivné atraktory. Jestliže je však dimenze atraktoru větší než 3, nevystačíme při rekonstrukci se třemi rozměry. Body pocházející z atraktoru vyšší dimenze by hustě zaplnily část třírozměrného prostoru a struktura atraktoru by zůstala skrytá.

V takovém případě je potřeba rekonstrukci provést vnořením (angl. embedding) do prostoru dostatečně velké dimenze d_E (angl. embedding dimension) tak, že sestrojíme vektory

$$u(t) = (s(t), s(t+T), \dots, s(t+(d_E-1)T)). \quad (2.14)$$



a)



b)

Obrázek 5 a) Graf řady $x(t)$ v závislosti na čase. Parametr $c = 5,7$. **b)** Obrázek stavového prostoru s rekonstruovaným Rösslerovým atraktorem.

Matematické věty, jejichž autory jsou Ricardo Mañé a Floris Takens¹⁴ zaručují, že atraktor dimenze d lze jistě zrekonstruovat v d_E -rozměrném prostoru, jestliže platí $d_E > 2d$. Rekonstrukci podivných atraktorů lze považovat za změnu souřadnic. Rekonstrukce je vlastně vnoření z původního prostoru do jiného prostoru. Výběr dostatečně velké dimenze tohoto prostoru zaručuje, že vnoření je prosté. To znamená, že každý bod promítnutého atraktoru odpovídá jedinému bodu původního atraktoru. Dostáváme věrnou reprezentaci podivného atraktoru a ne nějaký obraz, ve kterém by trajektorie splývaly. Proto jsme schopni z časové řady jediné proměnné získat informace o tvaru a charakteru atraktoru studovaného systému a tím poodhalit alespoň některé zákonitosti jeho fungování.

Pro úspěšnou rekonstrukci atraktoru je důležité vhodně zvolit hodnoty dimenze vnoření d_E a časového kroku T . Jestliže je zvolené T příliš malé, potom sestrojené vektory mají složky, které jsou silně korelované. Projeví se to tím, že zrekonstruovaný atraktor bude degenerovaný a bude připomínat „úhlopříčku“ prostoru. Naopak, jestliže je T velké, vzniká opačné nebezpečí: složky vektorů jsou navzájem nekorelované, trajektorie „putují“ po celém prostoru a odhalit strukturu atraktoru je obtížné. Nalezení vhodných hodnot dimenze vnoření d_E a časového kroku T je často stejně obtížné, jako samotná rekonstrukce atraktoru. Pro stanovení dimenze vnoření se doporučuje metoda pokusu a omylu: postupně zvyšovat d_E a pohledem na výsledný obrázek rozhodnout, zda je dimenze vnoření dostatečná nebo je třeba ji zvětšit. Autokorelační funkce řady pozorovaných hodnot může pomoci určit časový krok T . Doporučuje se zvolit zpoždění, pro které je autokorelační funkce blízko nuly.

V poslední době byly publikovány dvě nové metody pro nalezení optimálních hodnot časového kroku a dimenze vnoření.

2.6.1 Vzájemná informace

Koncept vzájemné informace (mutual information) pochází z teorie informace. Zjednodušeně řečeno jde o nelineární obdobu klasické korelační funkce. Liší se od ní v tom, že výsledné hodnoty jsou v bitech a nepřijímají se žádné předpoklady o rozdělení veličin. Vzájemná informace $I(X, Y)$ podává odpověď na otázku: kolik informace v průměru získáme z posloupnosti X o posloupnosti Y ? Když je posloupností Y stejná posloupnost X posunutá o časový úsek τ , potom vzájemná informace $I(\tau)$ je paralelou autokorelace. Jestliže hledáme časový krok pro rekonstrukci stavového prostoru, počítáme vzájemnou informaci postupně pro zvyšující se hodnoty τ . Vzájemná informace obvykle nejprve klesá a

¹⁴ MAÑÉ, R.: On the Dimension of the Compact Invariant Set of Certain Nonlinear Maps. In *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980. Ed. D. Rand, L. Young. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 898, 1981, s. 230-242. TAKENS, F.: Detecting Strange Attractors in Turbulence. In *Dynamical Systems and Turbulence*, Warwick 1980. Ed. D. Rand, L. Young. *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 898, 1981, s. 366-381.

pro vyšší časové kroky roste. Autor článku [Kennel 1992], který použil tuto metodu ke stanovení optimálního časového kroku pro potřeby rekonstrukce stavového prostoru, doporučuje vybrat τ , v němž má vzájemná informace první minimum. Jinými slovy chceme, aby každá nová složka vektoru (2.14) poskytla co nejvíce nové informace.

2.6.2 Nepravý nejbližší soused

Dimenze vnoření d_E musí být dostatečně velká, aby se trajektorie v rekonstruovaném prostoru neprotínaly. Otázkou zůstává, jak najít minimální dimenzi vnoření, pro kterou je podmínka splněna. Z teoretického hlediska není podstatné, zda se pro rekonstrukci použije minimální nebo jiná, vyšší, dimenze vnoření. Věta o vnoření platí pro obě z nich. V praxi při práci s reálnými daty může způsobit použití zbytečně vysoké dimenze vnoření potíže. Reálná data obvykle obsahují šum, který bude zatěžovat všechny složky vektoru $u(t)$, viz (2.14). Čím více bude mít vektor u složek, tím bude vliv šumu větší. Predikční techniky používají sestavené vnořené vektory a každá jejich další složka představuje dodatečné nároky v podobě většího počtu odhadovaných parametrů a delšího času výpočtu.

Metoda nepravého souseda (angl. false nearest neighbour), jejímiž autory jsou [Kennel et al. 1992], dokáže určit minimální potřebnou dimenzi vnoření i pro krátké nebo šumem zatížené časové řady. Zaručuje, že body jsou sousedy v rekonstruovaném stavovém prostoru v důsledku dynamiky systému, a ne z důvodu nedostatečného počtu rozměrů rekonstruovaného prostoru. Jestliže zvolíme nízkou dimenzi vnoření, může se stát, že dva body, které jsou v původním, neznámém, stavovém prostoru daleko od sebe, budou v prostoru, do něhož vnoření provádíme, blízko sebe (tj. stanou se „sousedními body“). Metoda nejbližšího nepravého souseda tvoří z řady skalárních dat vektory postupně v dimenzi $d = 1, d = 2$ atd. V každé dimenzi najde pro všechny body jejich nejbližšího souseda (ve smyslu nejmenší euklidovské vzdálenosti) a zapamatuje si vzdálenost mezi nimi. Potom se dimenze zvětší o jedničku a spočítá se nová vzdálenost mezi sousedními body. Když je nová vzdálenost výrazně větší než předcházející, jsou body nepravými nejbližšími sousedy. Takové body se k sobě dostaly uměle a ve skutečnosti k sobě nepatří. Počet nepravých sousedů se zaznamená a postup se opakuje pro vyšší dimenzi. Procedura skončí, jestliže je v dimenzi d počet nepravých sousedů velmi malý. Tato dimenze je nejmenší nutná dimenze vnoření.

2.6.3 Predikce

Předpokládejme, že data (například výnosy akciového indexu) vycházejí z modelu

$$x_t = f(x_{t-1}, \dots) + \varepsilon_t, \quad (2.15)$$

s nezávislymi stejně rozdělenými ε_t . Chaotické systémy jsou speciálním případem, f je nelineární a $\varepsilon_t = 0$. S použitím některé formy nelineární regrese lze nelineární funkci f odhadnout z pozorovaných dat. V praxi se používá například metoda nejbližšího souseda, lokálně vážená regrese, která je zobecněním předcházející metody a v poslední době se stále více využívají neuronové sítě. Bylo dokázáno, že vícevrstevné dopředné neuronové sítě jsou univerzálními aproximátory. Dokáží s libovolnou přesností aproximovat libovolnou funkci.

[Farmer-Sidorowich 1987] vysvětlili myšlenku metody nejbližšího souseda. Máme řadu skalárních dat, ze kterých sestrojíme vnořené vektory $y(t)$

$$y(t) = [s(t), s(t - \tau), \dots, s(t - (d_E - 1) \cdot \tau)]. \quad (2.16)$$

Předpokládáme, že data pochází ze systému

$$y(t + 1) = f(y(t)). \quad (2.17)$$

Máme pozorování $s(t)$, $s(t-1)$, ... a chceme předpovědět $s(t+1)$. Jestliže je v rekonstruovaném stavovém prostoru $y(t-1)$ blízko $y(t'-1)$, je rovněž $y(t)$ blízko $y(t')$. Provedeme nelineární regresi $y(t'+1)$ na $y(t')$ a získáme odhad funkce f . Tento odhad použijeme k předpovědi $y(t)$. Použitý postup lze upravit tak, že pro nalezení nelineárního odhadu funkce f nepoužijeme jen nejbližší sousední bod, ale obecně k nejbližších sousedů.

Kvalita predikcí získaných nelineárními metodami se ukázala jako vhodný prostředek k rozlišení lineárních modelů od nelineárních a nelineárních deterministických od nelineárních stochastických modelů. Je-li systém nelineární, potom predikce získané nelineárními postupy jsou lepší než předpovědi z lineárních metod. Znamená to, že existuje větší korelace mezi predikovanými a skutečnými hodnotami. Pro odlišení chaotických a nelineárních stochastických systémů je vhodné sledovat vývoj chyby předpovědi v čase. Chování chaotického systému lze v krátkém období poměrně přesně předpovědět, v dlouhém období je chaos nepredikovatelný, protože vykazuje citlivou závislost na počátečních podmínkách. Stochastický systém v tomto smyslu není predikovatelný ani v krátkém období. Jestliže přesnost předpovědi klesá s rostoucím časovým horizontem přibližně exponenciálně, je systém chaotický. Pro nelineární stochastické modely je kvalita předpovědi nízká a příliš se s horizontem předpovědi nemění.

2.7 Chaos na kapitálových trzích

Teorie chaosu zaznamenala nepochybně výrazný úspěch v různých vědních oborech. Zdánlivě nahodilé chování některých systémů se ukázalo být výsledkem nestabilních deterministických zákonitostí, kterými se systémy řídí. Teorie chaosu se nevyhnula ani ekonomii. Fluktuační makroekonomických veličin a cen na kapitálových trzích byly považované za důsledek působení exogenních nepredikovatelných šoků. Samotný tržní mechanismus byl považován za dynamicky stabilní a rovnovážný. Někteří ekonomové se sice snažili modelovat cyklický vývoj ekonomiky s použitím nelineárních deterministických dynamických systémů¹⁵, avšak v hlavním proudu ekonomické teorie převažovaly lineární modely s exogenními šoky.

V teorii chování cen na kapitálových trzích byla dominance lineárních stochastických modelů zcela jednoznačná. Přibližně v polovině osmdesátých let však zasáhla teorie chaosu i tuto oblast. Nebylo náhodné, že v ekonomii byl vliv teorie chaosu největší právě v oblasti kapitálových trhů. Zaprvé případná přítomnost chaosu v řadě cen akcií by znamenala možnost alespoň krátkodobých předpovědí budoucího vývoje. Druhým důvodem je velký počet údajů o historii cen. Detekce chaosu do značné míry závisí na počtu pozorování a délce časové řady, kterou analyzujeme. Na některých kapitálových trzích jsou k dispozici časové řady denních výnosů delší než sedmdesát let. S rozvojem výpočetní techniky se rozšířila i možnost sledovat vysokofrekvenční data a nyní lze analyzovat změny výnosů každých dvacet sekund, což je přibližně čas nutný k uskutečnění jedné transakce. V těchto řadách je tedy zachycen téměř úplný cenový vývoj. Na problém s malým počtem pozorování lze narazit v makroekonomii, kde se měření provádí zpravidla čtvrtletně, někdy dokonce pouze jednou ročně. Proto prakticky nelze v makroekonomických agregátech chaos odhalit.

Základními znaky chaotických systémů je nízká korelační dimenze a kladný Ljapunovův exponent. Rané práce se zaměřily na odhad těchto charakteristik pro data z kapitálového trhu. [Scheinkman - LeBaron 1989] studovali týdenní a denní výnosy indexu, jehož hodnoty publikuje CRSP (Center for Research in Security Prices) zřízené při chicagské univerzitě. Jedná se o kapitalizaci vážený index, který se od jiných indexů liší tím, že zohledňuje dividendy. Autoři pracovali se souborem více než 5200 denních pozorování a zjistili, že korelační dimenze denních výnosů je rovna přibližně 5,7. K prakticky stejnému výsledku dospěli také pro týdenní data. Scheinkman a LeBaron dále vybrali jeden cenný papír zahrnutý do indexu (Abbott Laboratories) a provedli odhad korelační dimenze pro jeho výnosy. V tomto případě byla korelační dimenze vyšší (okolo 8,7) a byla nestabilní. To znamená, že závisela na dimenzi vnořených vektorů, viz vztah (2.7). Jiní autoři dospěli na základě jiných dat k

¹⁵ Např. KALDOR, N.: A Model of the Trade Cycle. *Economic Journal*, 50, 1940, s. 78-92. HICKS, J.: A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. Oxford, Clarendon Press 1950.

odlišným hodnotám korelační dimenze. Mayfield a Mizrach¹⁶ vyšli z hodnot indexu S&P 500 sledovaných ve dvacetisekundových intervalech. Datový soubor obsahoval 20 000 pozorování a odhad korelační dimenze byl přibližně 3,5. S pravděpodobně nejnižším odhadem korelační dimenze pro data z kapitálového trhu přišel Edgar Peters.¹⁷ Na základě měsíčních údajů došel k hodnotě 2,33. [Sirlantzis-Siriopoulos 1993] provedli odhad korelační dimenze pro řecký kapitálový trh a zjistili hodnotu 2,35. Jejich závěry jsou založeny na 144 pozorováních měsíčních výnosů oficiálního indexu athénské burzy z let 1980-1992. Tak malý soubor však svádí k pochybnostem o věrohodnosti a stabilitě odhadu.

Citlivá závislost na počátečních podmínkách je základní vlastností chaotických systémů. Měří se obvykle Ljapunovovým exponentem. Jeho výpočet z empirických dat je ještě náročnější na počet pozorování než odhad korelační dimenze. Proto se pro ekonomická data neprovádí odhad největšího Ljapunovova exponentu příliš často. Eckman et al.¹⁸ s použitím vlastního algoritmu zjistili pro týdenní výnosy indexu CRSP, že největší Ljapunovův exponent je kladný.

Závěry studií, které pro data z kapitálového trhu zjistily kladný Ljapunovův exponent a nízkou korelační dimenzi, by na první pohled bylo možné interpretovat ve prospěch přítomnosti chaosu ve vývoji cen. Situace však není tak jednoznačná. Nízká korelační dimenze a kladný Ljapunovův exponent jsou sice znaky chaotického procesu, nejedná se však o statistické testy v pravém slova smyslu. Není známé jejich asymptotické chování, a proto nelze určit statistickou významnost odhadů získaných na základě konečného počtu pozorování. Charakteristickou vlastností chaotických systémů je krátkodobá predikovatelnost jejich chování. Kvalita předpovědí klesá exponenciálně s předpovědním horizontem. Nabízí se otázka: Lze předpovídat vývoj cen na kapitálovém trhu v krátkém období? [Brock 1996] shrnul zjištění studií, které se o to pokusily. Nelineární metody nebyly schopné poskytnout předpovědi, které by byly významně lepší než předpovědi minulou hodnotou, které vyplývají z modelu náhodné procházky.

Celkově lze říci, že důkazy přítomnosti chaosu v cenách cenných papírů jsou slabé. Naděje obchodníků, kteří věřili v možnost krátkodobých předpovědí, se nesplnili. Tato zjištění svádí někdy k chybnému podceňování významu výzkumu chaosu v ekonomii. [Brock 1993] uvedl tři nepochopení, se kterými se setkává při přednáškách o chaosu pro ekonomy. Zaprvé málo důkazů přítomnosti

¹⁶ MAYFIELD, E. S. - MIZRACH, B.: On Determining the Dimension of Real-Time Stock Price Data. (Working Paper 187), Department of Economics, Boston College, Chestnut Hill, 1989.

¹⁷ PETERS, E.: A Chaotic Attractor for the S&P 500. *Financial Analysts Journal*, 1991, č. 2 (March-April), s. 55-81.

¹⁸ ECKMAN, J. P. - KAMPHORST, S. O. - RUELLE, D. - SCHEINKMAN, J.: Lyapunov Exponents For Stock Returns. In *The Economy as an Evolving Complex System*. Ed. P.W. Anderson, K. J. Arrow, D. Pines. New York, Addison-Wesley 1988.

chaotického chování v ekonomických časových řadách neznámá, že teorie chaosu není užitečným prostředkem ke zkoumání ekonomických jevů. Problém tkví v kvalitě dat, které mají ekonomové k dispozici, a v neexistenci statistických testů schopných odhalit chaos v časové řadě.

Druhé nedorozumění spočívá v chybném závěru, že z nevýznamného role chaosu v ekonomii vyplývá nevýznamnost nelinearity obecně. Chaos je pouze velmi speciálním případem nelinearity. Metody inspirované snahou objevit chaos se ukázaly jako užitečné při odhalování dalších typů nelinearity. Neexistence chaosu rozhodně neznámá vítězství lineárních modelů, pouze způsobí, že zájem se přesune k jiným třídám nelineárních modelů.

Poslední nepochopení považuje Brock za nejdůležitější. To, že předpovědi z nelineárních modelů nejsou lepší než z lineárních, neznámá, že nelinearita není v ekonomii a financích významná. Problém spočívá v určité nestacionaritě vývoje cen akcií. Někteří autoři upozornili, že v časové řadě historických cen existují období, kdy jsou předpovědi z nelineárních modelů velmi přesné a na druhé straně úseky, v nichž se predikce neliší od předpovědí z lineárních modelů. Ukázali, že kvalitu krátkodobých předpovědí lze zlepšit, jestliže se využije určitá lokální informace. LeBaron¹⁹ zjistil, že autokorelace, a tedy i predikovatelnost, výnosů akciového indexu se mění v závislosti na lokální volatilitě

$$r_t = f(\sigma_t^2)r_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.18)$$

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N r_{t-i}^2, \quad (2.19)$$

kde N je délka období, ve kterém se provádí odhad podmíněného rozptylu. Funkce f je klesající vzhledem k podmíněnému rozptylu, což znamená, že predikovatelnost řady výnosů je větší v obdobích s nižší volatilitou.

¹⁹ LEBARON, B.: Some Relation Between Volatility and Serial Correlation in Stock Returns. *Journal of Business*, 65, 1992, s. 199-219.

3. Další typy nelineární závislosti

V předchozí kapitole jsme podrobněji zkoumali možnost, zda výnosy na kapitálovém trhu nejsou výsledkem působení deterministického systému, jehož chování je chaotické. Na základě zjištění citovaných studií jsme na položenou otázku odpověděli záporně. Vyslovený závěr se dal do značné míry očekávat. Bylo by naivní předpokládat, že ceny se tvoří podle pevně stanovených pravidel bez jakéhokoliv prvku nejistoty. Význam teorie chaosu spočívá v tom, že upozornila na omezení lineárních statistických postupů, které nejsou schopné odhalit v datech nelineární strukturu.

Chaos je pouze speciálním případem obecného nelineárního procesu, který se skládá z deterministické i stochastické složky. Stochastická složka se obvykle označuje jako šum procesu (angl. process noise) nebo dynamický šum (angl. dynamic noise) a je to nevysvětlená část dynamiky systému. Nevysvětlená složka bývá aproximována bílým šumem. Formálně:

$$x_t = f(x_{t-1}, \dots, x_{t-q}, \varepsilon_t), \quad (3.1)$$

kde ε_t je dynamický šum. Jestliže se samotná deterministická složka chová chaoticky, potom se celý systém označuje jako chaos se šumem (angl. noisy chaos). Právě tento typ chaosu se nejčastěji vyskytuje v reálném světě.

Chaos a náhodná procházka jsou dvě extrémní teorie, které si kladou za cíl vysvětlit vývoj cen na kapitálovém trhu. Podle první jsou pohyby cen pouze zdánlivě náhodné a ve skutečnosti se řídí čistě deterministickým předpisem, teorie náhodná procházka naopak tvrdí, že jednotlivé cenové změny jsou nezávislé a dokonale náhodné, protože jsou vyvolány novými informacemi, jejichž příchod nelze předpovídat. Lze se domnívat, že skutečnost bude pravděpodobně někde mezi těmito dvěma krajními případy. Pohyby v cenách jsou způsobeny příchodem nových zpráv, ale také chováním účastníků trhu. Domněnka, že výnosy nejsou nezávislé a stejně rozdělené, kterou jsme již několikrát vyslovili, měla spíše intuitivní charakter. Vycházeli jsme z určitých znalostí o reálných kapitálových trzích a chování jednoduchých chaotických systémů. Bylo by však vhodné naši domněnku exaktně podložit. BDS test, který je ekonomy často používán, je testem hypotézy, že data jsou nezávislá a stejně rozdělená. Výhodou je jeho citlivost na lineární i nelineární typy závislosti.

3.1 BDS test

Test vypracovali Brock, Dechert a Scheinkman v roce 1987 a jeho název je odvozen z počátečních písmen jeho autorů. Test byl autory v průběhu let několikrát mírně revidován, naposledy v [Brock et al. 1996]. BDS test je neparametrický test nulové hypotézy, že data jsou nezávislá a stejně

rozdělená. Test vychází z konceptu korelačního integrálu, viz vzorec (2.8). Jestliže jsou pozorování nezávislá a stejně rozdělená, potom

$$C_m(\varepsilon) = C_1(\varepsilon)^m. \quad (3.2)$$

Korelační integrál $C_m(\varepsilon)$ je odhad pravděpodobnosti $P(\|x_t^m - x_s^m\| < \varepsilon)$ a $C_1(\varepsilon)$ odhad pravděpodobnosti $P(\|x_t^1 - x_s^1\| < \varepsilon)$. Jestliže platí nulová hypotéza, potom

$$P(\|x_t^m - x_s^m\| < \varepsilon) = P(|x_t - x_s| < \varepsilon, \dots, |x_{t+m-1} - x_{s+m-1}| < \varepsilon) \cong [P(|x_t - x_s| < \varepsilon)]^m. \quad (3.3)$$

BDS test odhaduje v příslušném intervalu rozdíl mezi sdruženým rozdělením a součinem marginálních rozdělení. Odhad korelačního integrálu pro dimenzi m z n pozorování se označuje $C_m(n, \varepsilon)$ a je definován jako

$$C_m(n, \varepsilon) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} I_\varepsilon^m(x_i, x_j), \quad (3.4)$$

kde

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x_i, x_j) &= 1, \text{ pokud } |x_i - x_j| \leq \varepsilon \\ &= 0, \text{ pokud } |x_i - x_j| > \varepsilon \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$I_\varepsilon^m(x_i, x_j) = \prod_{k=0}^{m-1} I_\varepsilon(x_{i+k}, x_{j+k})$$

Autoři definovali BDS statistiku jako

$$BDS_m(n, \varepsilon) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_m(\varepsilon)} [C_m(n, \varepsilon) - (C_1(n, \varepsilon))^m]. \quad (3.6)$$

Člen $\sigma_m(\varepsilon)$ je odhad asymptotické směrodatné odchylky $\sqrt{n} \cdot [C_m(n, \varepsilon) - (C_1(n, \varepsilon))^m]$ definovaný jako

$$\sigma_m^2(\varepsilon) = 4 \left[K^m + 2 \sum_{j=1}^{m-1} K^{m-j} C^{2j} + (m-1)^2 C^{2m} - m^2 K C^{2m-2} \right]. \quad (3.7)$$

Konzistentními odhady C a K jsou

$$K = K_1(n, \varepsilon) = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} I_\varepsilon(x_i, x_j) I_\varepsilon(x_j, x_k) \quad (3.8)$$

$$C = C_1(n, \varepsilon) \quad (3.9)$$

Vzdálenost ε se obvykle volí jako proporce výběrové směrodatné odchylky dat.

Pro $n \rightarrow \infty$ konverguje BDS statistika v distribuci k standardnímu normálnímu rozdělení. Autoři uvádějí, že výběrové rozdělení aproximuje asymptotické rozdělení pro $n > 500$. BDS test má několik užitečných vlastností. Je to neparametrický test, proto nevyžaduje, aby data byla vybírána z normálního rozdělení. Většina používaných testů nelinearity vyžaduje existenci konečného alespoň čtvrtého momentu rozdělení. BDS statistika konverguje i pro data z rozdělení s nekonečným rozptylem. Pro tuto skutečnost se BDS test používá při analýzách dat z finančních trhů, které nemají konečný čtvrtý moment.

Základním rysem BDS testu je jeho citlivost na široký soubor alternativních hypotéz. Dokáže odhalit různé typy procesů, které nejsou nezávisle a stejně rozdělené:

- lineární závislost,
- nestacionarita,
- chaos,
- nelineární stochastické procesy (např. procesy s podmíněnou heteroskedasticitou).

Tuto vlastnost lze na jednu stranu považovat za výhodu, na druhé straně nelze přímo z BDS testu určit, která z alternativ zamítnutí nulové hypotézy způsobila. Je nutné použít speciální statistické testy, které jsou citlivé pouze na jeden typ závislosti.

BDS test lze použít jako test nelinearity, jestliže z výnosů předem s použitím autoregrese odstraníme lineární závislost. Již dříve jsme uvedli, že chybějí důkazy přítomnosti chaotické dynamiky ve výnosech. Zbývá tedy prozkoumat možnost, že výnosy nejsou stacionární a nebo pochází z nelineárního stochastického procesu.

3.2 Nestacionarita

Nestacionarita je pro ekonomy synonymem pro strukturální změny. Bylo by naivní myslet si, že se kapitálové trhy v čase nemění a jsou stejné dnes jako před třiceti lety. V sedmdesátých letech došlo například na newyorské burze k deregulaci poplatků za obchodování, což vedlo k poklesu transakčních nákladů a k nárůstu počtu transakcí. Rozvinuly se obchody s deriváty, pokrok v oblasti výpočetní a telekomunikační techniky způsobil, že je obchodníkům k dispozici více informací ve stále kratším čase.

Je proto potřeba připustit možnost, že příčinou zamítnutí nulové hypotézy BDS testu je nestacionarita časové řady výnosů.

Implicitně se předpokládá, že ke strukturálním změnám nedochází příliš často. V krátkém období by proto měla být data stacionární. [Hsieh 1991] postupně porovnával výsledky BDS testu pro výnosy indexu S&P 500 stále vyšší frekvence ve stále kratším intervalu: týdenní výnosy v období 1962-1989, denní výnosy v období 1983-1989 a patnáctiminutové výnosy v jednotlivých čtvrtletích roku 1988. BDS test zamítl hypotézu nezávislých a stejně rozdělených výnosů pro všechny skupiny dat. Z těchto výsledků lze učinit závěr, že občasně strukturální změny nevedly k zamítnutí hypotézy nezávislých stejně rozdělených výnosů. Existuje ještě možnost, že strukturální změny jsou tak časté, že jsou příčinou zamítnutí nulové hypotézy i u patnáctiminutových výnosů v intervalu tří měsíců. Pokud je to pravda, potom je jakákoliv snaha o modelování dynamiky výnosů zbytečná, protože dříve než by byl model identifikován, neplatil by.

Hsieh odmítl možnost, že by zamítnutí nulové hypotézy BDS testu způsobila nestacionarita dat. Na druhé straně jsme v této práci již několikrát uvedli (a ještě uvedeme) zjištění, která stacionaritu dat zpochybňují. Otázka stacionarity dat není dosud jednoznačně zodpovězena.

3.3 Podmíněná heteroskedasticita

Již v šedesátých letech upozorňovali někteří autoři na určité jevy v chování cen akcií, které nebyly v souladu s předpokladem nezávislosti, s nímž pracoval model náhodné procházky. Mandelbrot²⁰ poprvé poukázal na fakt, že velké cenové změny mají tendenci být následovány v dalším období velkými změnami. Znaménko (směr) následující změny je zdánlivě náhodné. Nabízí se vysvětlení, že podmíněná volatilita výnosů není v čase konstantní a závisí na určité minulé informaci. Dynamickému chování výnosů tedy nelze porozumět bez pochopení podmíněné heteroskedasticity. Jestliže se volatilita mění, mají výnosy charakter procesu nelineárního v rozptylu, který lze obecně popsat:

$$x_t = g(x_{t-1}, \dots) \varepsilon_t, \quad (3.10)$$

kde ε_t jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny a platí $E[\varepsilon_t | x_{t-1}, \dots] = 0$ a $Var[\varepsilon_t | x_{t-1}, \dots] = 1$. Podmíněná heteroskedasticita se projevuje korelací $|x_t|$ a $|x_{t-i}|$. Vezmeme-li absolutní hodnoty členů z výrazu (3.10), dostaneme

²⁰ MANDELBROT, B.: The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*, 36, October 1963, s. 394-419.

$$|x_t| = |g(x_t, \dots)| |\varepsilon_t|. \quad (3.11)$$

Jestliže je funkce g diferencovatelná, lze s použitím Taylorova rozvoje dokázat, že $|x_t|$ závisí na $|x_{t-i}|$. Stejným postupem lze ukázat, že při podmíněné heteroskedasticitě je x_t^2 korelované s x_{t-i}^2 .

Speciálními případy modelu s podmíněnou heteroskedasticitou jsou modely autoregresní podmíněné heteroskedasticity (zkr. ARCH). Tento typ modelu použil poprvé Engle. Analyzoval modely inflace a zjistil, že velká a malá rezidua z těchto modelů se objevují ve shlucích. Navrhl typ heteroskedasticity, ve kterém rozptyl reziduální složky závisí na velikosti minulých hodnot.²¹ Model ARCH řádu q lze zapsat

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad (3.12)$$

kde z_t jsou nezávislé stejně rozdělené standardizované náhodné veličiny a σ_t je podmíněný rozptyl ε_t , který závisí na druhé mocnině minulých inovací:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2. \quad (3.13)$$

Bollerslev rozšířil původní koncepci ARCH modelu do modelu všeobecné autoregresní podmíněné heteroskedasticity (zkr. GARCH).²² Podmíněný rozptyl závisí nyní nejen na druhé mocnině minulých inovací, ale rovněž na zpožděné autoregresní složce. Podmíněný rozptyl procesu GARCH(p, q), kde p je řád autoregresní složky, má tvar

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \cdot \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \cdot \sigma_{t-j}^2. \quad (3.14)$$

Přednost modelu GARCH před ARCH spočívá v tom, že model GARCH s malým počtem členů dokáže zachytit podmíněnou heteroskedasticitu v datech stejně, nebo lépe, než model ARCH s velkým počtem členů. Koeficienty α_i pro $i = 0, \dots, q$ a β_j pro $j = 1, \dots, p$ mají být kladné, nebo nulové, aby σ_t^2 bylo nezáporné. Aby byl proces stacionární v rozptylu, musí platit

²¹ ENGLE, R. F.: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 1982, s. 987-1008.

²² BOLLERSLEV, T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 1986, s. 307-328.

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1. \quad (3.15)$$

K určení vhodných p a q lze použít některého z informačních kritérií.

Modely GARCH dokáží zachytit jevy, které lze pozorovat v cenách akcií. Jedná se zejména o shlukování volatilita a široká okrajová pásma rozdělení výnosů. Protože $a_1 > 0$, platí, že čím větší je ε_t^2 , tím větší je ε_{t+1}^2 . Velká (malá) rezidua bývají následována velkými (malými) rezidui. Výsledkem náhodných změn v podmíněném rozptylu σ_t^2 je, že rozdělení ε_t má mohutnější okrajové oblasti než rozdělení z_t . Jestliže náhodné veličiny z_t jsou například rozděleny normálně, potom ε_t je podmíněně normální, ale nepodmíněně leptokurtózní.

Jinou často popisovanou skutečností je asymetrická reakce volatilita výnosů na nové zprávy. Volatilita roste, jestliže jsou informace špatné, naopak klesá při dobrých zprávách. Modely GARCH nejsou schopné tuto asymetrii zachytit. Dokáže to model exponenciální GARCH (zkr. EGARCH), jehož autorem je Nelson²³

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \beta \cdot \ln \sigma_{t-1}^2 + \gamma \cdot \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}. \quad (3.16)$$

Model EGARCH na rozdíl od modelu GARCH neklade žádná omezení stran znamének parametrů, aby podmíněný rozptyl byl kladný.

Přítomnost podmíněné heteroskedasticity v datech z kapitálových a devizových trhů byla mnohokrát prokázána. Modely ARCH a odvozené jsou na tato data velmi často aplikovány (např. [Brock et al. 1992], [Hsieh 1991], [Kočenda 1996]). Problémem, který není uspokojivě vyřešen, je, zda podmíněná heteroskedasticita je jediným důvodem k zamítnutí nulové hypotézy o nezávislosti a stejném rozdělení výnosů. Pokud by to byla pravda, potom pro standardizovaná rezidua z modelu ARCH by již nulovou hypotézu nebylo možné zamítnout. [Hsieh 1991] odhadl parametry modelu EGARCH pro výnosy indexů z amerického kapitálového trhu a provedl BDS test na reziduích. Výsledky ukázaly, že nulovou hypotézu nelze zamítnout. Ještě zajímavější je závěr práce, jejímž autorem je LeBaron.²⁴ Sledoval GARCH rezidua týdenních výnosů indexu, který udržuje CRSP. Rezidua z modelu GARCH, jehož parametry byly odhadnuty na základě celého datového souboru (1962-1986) vykazovala

²³ NELSON, D. B.: Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59, 1991, s. 347-370

²⁴ LEBARON, B.: Nonlinear Econometrics for Chaos: Empirical Results. University of Wisconsin-Madison 1991.

významnou odchylku od nulové hypotézy BDS testu. Když však byl soubor rozdělen na dvě poloviny, nebylo možné zamítnout nulovou hypotézu pro rezidua z druhé poloviny. Opět vyvstává zásadní otázka, zda lze akceptovat implicitně přijímaný předpoklad stacionarity řady výnosů.

Odlišnost mezi učebnicovými modely ARCH a reálným chováním volatility výnosů lze dobře ukázat na průběhu autokorelační funkce. Procesy popsané modely typu ARCH patří mezi procesy s krátkou pamětí. Autokorelace volatility je pro všechny hodnoty zpoždění kladná, pro malé hodnoty zpoždění významně nenulová a pro větší klesá přibližně exponenciálně k nule. Autokorelační funkce volatility výnosů klesá pomaleji, přibližně hyperbolicky. Takové chování autokorelace je charakteristické spíše pro procesy s dlouhou pamětí. Pravděpodobně je tedy ve výnosech mimo podmíněné heteroskedasticity typu ARCH přítomná ještě určitá dlouhodobá složka.

3.4 Dlouhodobá závislost výnosů

Odhalení jisté formy dlouhodobé paměti ve volatilitě vede ke studiu chování výnosů a volatility v dlouhém období. Na základě autokorelační analýzy byla prokázána krátkodobá závislost výnosů na kapitálovém trhu. Odborníci se domnívali, že předpoklad nezávislosti lze přijmout alespoň pro chování výnosů v dlouhém časovém horizontu. Fama uvedl ve svém článku [Fama 1970, s. 414], že náhodnou procházku lze použít jako model chování cen pro časový krok větší než týden nebo měsíc.

Různí autoři použili ke studiu dlouhodobé závislosti odlišné postupy. Fama a French²⁵ se zaměřili na vývoj autokorelační funkce výnosů. Na rozdíl od dřívějších studií, které analyzovali autokorelaci výnosů v krátkém období, zkoumali Fama a French vzájemnou korelaci výnosů v delších časových intervalech. Použili roční výnosy z let 1926-1985 a zjistili, že autokorelační funkce má tvar písmene U. V krátkém období je blízko nuly, ve střednědobém horizontu (3-5 let) je významně záporná a v delším období opět přibližně nulová.

Odlišný přístup zvolili Poterba a Summers.²⁶ Sledovali vývoj poměru rozptylů (angl. variance ratio) v různě dlouhých časových intervalech. Poměr rozptylů je definován jako podíl rozptylu výnosů za k období a rozptylu výnosů za jedno období. Pokud by nebyly výnosy vzájemně korelované, rozptyl výnosů za k období by byl k krát větší než rozptyl jednoduchých výnosů. Autoři použili výnosy indexu od roku 1926 a shledali, že vývoj poměru rozptylů nepotvrzuje předpoklad o nekorelovanosti výnosů. Zjistili, že například rozptyl šestiletých výnosů je pouze třikrát až čtyřikrát větší než rozptyl ročních

²⁵ FAMA, E. F. - FRENCH, K.: Permanent and Temporary Components of Stock Prices. *Journal of Political Economy*, 96, 1988, s. 246-273.

²⁶ POTERBA, J. M. - SUMMERS, L. H.: Mean Reversion in Stock Prices: Evidence and Implications. *Journal of Financial Economics*, 22, 1988, s. 27-60.

výnosů, ačkoliv za předpokladu nekorelovanosti by měl být větší šestkrát. Vývoj burzovního indexu má tedy charakter procesu vracejícího se ke střední hodnotě (angl. mean reverting process). Znamená to, že cenovou změnu budou v dlouhém období následovat predikovatelné změny s opačným znaménkem.

K měření dlouhodobé paměti ve stochastických i deterministických procesech se také používají R/S analýza (z angl. rescaled range analysis) a Hurstův exponent. Proti autokorelační analýze má R/S analýza některé výhody. R/S analýza je neparametrická metoda a dokáže zjistit dlouhodobou závislost i v časových řadách, kde nejsou pozorování normálně rozdělená. R/S statistika konverguje skoro jistě pro stochastické procesy s nekonečným rozptylem. Navíc je R/S analýza schopna odhalit neperiodické cykly.

3.4.1 R/S analýza a Hurstův exponent

Britský hydrolog H. E. Hurst, který je považován za autora myšlenky R/S analýzy, pracoval na projektu přehrady na Nilu. Sledoval výšku hladiny řeky, protože potřeboval k určení optimální kapacity přehrady zjistit, kolik vody Nilem protéká. Egypťané vedli velmi dlouho a pečlivě záznamy o Nilu a Hurst měl k dispozici roční údaje z let 622 až 1469. Množství přitékající vody je ovlivňováno mnoha různými faktory a proto se předpokládalo, že množství přitékající vody je náhodný proces. Ačkoliv standardní analýza neprokázala významnou korelaci mezi pozorováními, Hurst byl přesvědčen, že v řadě existuje závislost. Vytvořil proto vlastní metodu, která překonává slabá místa autokorelační analýzy. Hurst vyšel z práce Alberta Einsteina o Brownově pohybu z roku 1908. Brownův pohyb se stal základním modelem procesu náhodné procházky. Einstein zjistil, že vzdálenost, kterou pevná částice urazí, roste s druhou odmocninou časového kroku, který je použit při měření. Hurst použil tuto vlastnost k testování nezávislosti.

Nyní popíšeme postup výpočtu R/S statistiky a Hurstova exponentu, který je uveden v [Peters 1994]. Mějme časovou řadu x_t , $t = 1, 2, \dots, T$. Jestliže má být R/S analýza použita ke zjištění dlouhodobé paměti v časových řadách, musí být z řady x_t předem odstraněna krátkodobá závislost, protože samotná R/S analýza nedokáže tyto dva typy závislosti rozlišit. Lze použít autoregrese, vhodný řád modelu se určí s použitím některého informačního kritéria. Řadu rozdělíme na A částí, z nichž každá obsahuje n pozorování (platí $T \geq A \cdot n$). Označíme $y_{a,k}$ k -té pozorování v a -té části. Pro každou část spočítáme aritmetický průměr \bar{y}_a a výběrovou směrodatnou odchylku S_a

$$\bar{y}_a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n y_{a,k} \quad , \quad (3.17)$$

$$S_a = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (y_{a,k} - \bar{y}_a)^2} \quad . \quad (3.18)$$

Sestrojíme řadu částečných součtů odchylek $y_{a,k}$ od průměru \bar{y}_a , najdeme rozpětí pozorování v nové řadě R_a a rozpětí vydělíme směrodatnou odchylkou S_a

$$z_{a,\tau} = \sum_{k=1}^{\tau} (y_{a,k} - \bar{y}_a), \quad \tau = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

$$R_a = \max_{\tau} z_{a,\tau} - \min_{\tau} z_{a,\tau} . \quad (3.20)$$

Průměrná hodnota R/S statistiky pro časové měřítko n je definována

$$(R/S)_n = \frac{1}{A} \cdot \sum_{a=1}^A (R_a/S_a). \quad (3.21)$$

Podle popsaného postupu zjistíme hodnoty R/S statistiky pro různá n . Doporučuje se volit $n > 10$, protože malé hodnoty n jsou odhady R/S statistiky nestabilní. Předpokládáme, že pro vývoj R/S statistiky v závislosti na n platí zákonitost (angl. scaling law)

$$(R/S)_n \approx c \cdot n^H, \quad (3.22)$$

kde c je konstanta a H je Hurstův exponent. Jestliže vztah (3.22) upravíme do lineárního tvaru

$$\log(R/S)_n = \log c + H \cdot \log n, \quad (3.23)$$

můžeme získat odhad Hurstova exponentu metodou nejmenších čtverců.

Hurstův exponent může nabývat hodnot z intervalu (0, 1) a na jeho základě lze charakterizovat chování časové řady. Jestliže $H = 0,5$, proces je nezávislý. Nemusí však být nutně normální. Časová řada, pro níž je Hurstův exponent mezi 0,5 a 1, je perzistentní, tj. existuje v ní dlouhodobá závislost. To znamená, že budoucnost je do určité míry určena současným stavem. Pokud naopak $0 < H < 0,5$, potom časová řada je antiperzistentní. Antiperzistentní proces překoná menší vzdálenost než nezávislý, protože mění svůj směr častěji než nezávislý proces. S využitím R/S analýzy bylo zjištěno, že perzistentní procesy se vyskytují v přírodě velmi často. Pro změny hladiny Nilu stanovil Hurst hodnotu $H = 0,72$ a pro další časové řady z oblasti hydrologie a meteorologie zjistil exponenty okolo 0,7.²⁷

Otázkou zůstává, jak jsou odhady R/S statistiky a Hurstova exponentu získané na základě konečného počtu pozorování statisticky významné. Pro testy spolehlivosti je nutné stanovit asymptotické

²⁷ HURST, H. E.: The Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 1951, s.770-799.

vlastnosti R/S statistiky a Hurstova exponentu. R/S statistika je náhodná veličina s normálním rozdělením. Očekávanou hodnotu R/S statistiky lze určit ze vzorce (3.24) pro malé n . Pro $n > 300$ lze původní vzorec zjednodušit a výsledkem je vzorec (3.25)²⁸

$$E((R/S)_n) = \frac{\Gamma(0,5 \cdot (n-1))}{\sqrt{n} \cdot \Gamma(0,5 \cdot n)} \cdot \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}}, \quad (3.24)$$

$$E((R/S)_n) = \sqrt{\frac{2}{n \cdot \pi}} \cdot \sum_{r=1}^{n-1} \sqrt{\frac{n-r}{r}}. \quad (3.25)$$

Očekávaná hodnota Hurstova exponentu závisí na tom, jaké hodnoty $(R/S)_n$ se použijí v regresi. Očekávanou hodnotu Hurstova exponentu dostaneme, jestliže zopakujeme regresi (3.23) s očekávanými hodnotami R/S statistiky $E((R/S)_n)$ pro stejná n . Rozptyl očekávané hodnoty Hurstova exponentu závisí na počtu pozorování T ve výběru a platí

$$\sigma_H^2 = 1/T. \quad (3.26)$$

Greene a Fielitz²⁹ provedli R/S analýzu pro denní výnosy 200 akcií obchodovaných na NYSE a dospěli k závěru, že dlouhodobá závislost je významná pro velké procento titulů. Do širšího povědomí odborníků z oblasti kapitálových trhů se R/S analýza dostala zejména zásluhou Edgara Peterse, který ji použil k analýze výnosů akciového indexu a svá zjištění shrnul v knize [Peters 1994]. Peters sledoval chování výnosů indexu DJIA v období od ledna 1888 do konce roku 1990 a dospěl k hodnotě $H = 0,61$. K této hodnotě došel při analýze dvacetidenních, pětidenních i denních výnosů. Výsledek je významně různý od 0,5 a proto lze časovou řadu výnosů indexu DJIA klasifikovat jako perzistentní. Peters potvrdil zjištění některých dalších odborníků o přítomnosti dlouhodobé závislosti ve výnosech. Peters se dále zajímal, zda byl Hurstův exponent ve sledovaném období stabilní. Původní soubor rozdělil na tři přibližně stejně dlouhá období a určil Hurstův exponent pro každé z nich zvlášť. Odhady Hurstova exponentu se pohybovaly od 0,59 do 0,57 a pro druhé období (1917-1953) se odhad významně nelišil od 0,5. Tyto závěry vyvolávají určité pochybnosti o stacionaritě řady výnosů. Obecně lze říci, že řada výnosů vykazuje dlouhodobou závislost, jejíž síla není v čase konstantní.

²⁸ ANIS, A. - LLOYD, E.: The Expected Values of the Adjusted Rescaled Hurst Range of Independent Normal Summands. *Biometrika*, 63, 1976, s. 111-116.

²⁹ GREENE, M. - FIELITZ, B.: Long-Term Dependence in Common Stock Returns. *Journal of Financial Economics*, 4, 1977, s. 339-349.

4. Analýza časové řady výnosů akciového indexu

Některé výše popsané statistické nástroje jsme použili k analýze výnosů z kapitálového trhu. Data, která jsme za tímto účelem použili, byla denními výnosy akciového indexu Standard & Poor's 500 S&P 500, který sestavila společnost Standard & Poor's Corporation. Do indexu je zahrnuto 500 akcií obchodovaných na NYSE, z nichž je 400 z oblasti průmyslu, 40 ze sektoru veřejných služeb, 20 dopravních společností a 40 významných finančních institucí. Složení indexu je periodicky upravováno, aby odráželo aktuální situaci na trhu. Emise zastoupené v indexu reprezentují přes 90 % tržní hodnoty akcií, se kterými se obchoduje na NYSE. Index S&P 500 patří mezi kapitalizací vážené indexy. To znamená, že cena každého titulu zastoupeného v indexu je vynásobena počtem vydaných akcií a výsledkem je tržní hodnota emise. Tržní hodnoty všech akcií jsou sečteny, tato agregovaná tržní hodnota je vydělena agregovanou tržní hodnotou v základním období (1941-1943) a vynásobená 10. Postup výpočtu lze vyjádřit vzorcem

$$Index = \sum_{i=1}^n \frac{P_{it} \cdot Q_{it}}{P_{i0} \cdot Q_{i0}} \cdot 10, \quad (4.1)$$

kde P_{it} je současná tržní cena i -té akcie, P_{i0} tržní cena v základním období, Q_{it} počet vydaných akcií v současnosti, Q_{i0} počet akcií vydaných v základním období a n počet emisí zahrnutých do indexu. Ze vzorce je zřejmé, že v základním období byla hodnota indexu S&P 500 rovna 10.

Použili jsme denní hodnoty indexu z období od ledna 1964 do konce roku 1992.³⁰ Denní výnos indexu jsme definovali jako rozdíl dvou po sobě jdoucích logaritmů ceny (hodnoty indexu)

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}, \quad (4.2)$$

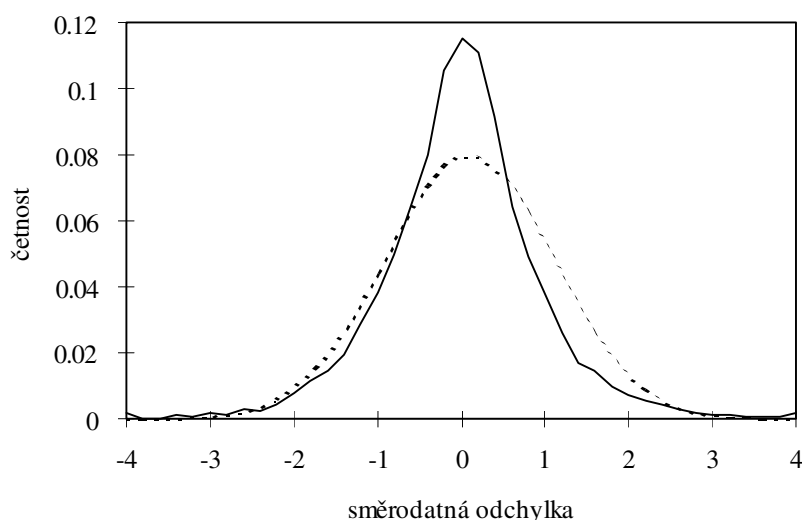
kde r_t je výnos indexu v období t , P_t a P_{t-1} hodnoty indexu v období t , respektive $t-1$. Změna logaritmů cen se běžně používá jako míra výnosu. Pro cenové změny menší než 15 % je přibližně rovna procentní změně ceny. V tabulce 1 jsou uvedeny základní popisné statistiky výnosů. Řada výnosů je zjevně leptokurtózní, koeficient špičatosti je významně vyšší než 3. Odlišnost rozdělení výnosů a normálního rozdělení je zřejmá z obrázku 6. V okolí střední hodnoty je rozdělení výnosů špičatější než normální rozdělení a ve sledovaném období bylo více extrémních výnosů než předpokládá normální rozdělení. Rozdělení výnosů je asymetrické. Medián je větší než aritmetický průměr, rozdělení je záporně zešikmené. Kladných výnosů je více než záporných. Tato skutečnost souhlasí s názorem technických analytiků, kteří tvrdí, že býčí (rostoucí) fáze trhu je obecně delší než fáze sestupná (medvědí). Minimální

³⁰ Denní uzavírací hodnoty dvou nejznámějších akciových indexů z NYSE - S&P 500 a DJIA - lze získat v síti Internet na adrese <ftp://econwpa.wustl.edu/econ-wp/data/papers/9603/9603001.tar.Z>.

výnos indexu je -22,8 % a této hodnoty bylo dosaženo v tzv. „černé pondělí“ 19. října 1987. Index uzavřel na hodnotě 224,84 a proti poslední páteční hodnotě poklesl o 57,58 bodů.

	1964-1992	1964-1978	1979-1992
Počet pozorování	7298	3757	3541
Průměr	0,0002	0,0001	0,0004
Medián	0,0003	0,0002	0,0005
Směrodatná odchylka	0,0090	0,0076	0,0103
Šikmost	-2,26	0,23	-3,29
Špičatost	61,18	2,88	74,21
Maximum	0,0871	0,0490	0,0871
Minimum	-0,2280	-0,0374	-0,2280

Tabulka 1 Deskriptivní statistiky výnosů akciového indexu S&P 500



Obrázek 6 Rozdělení výnosů akciového indexu S&P 500 (plná čára) a normální rozdělení (přerušovaná čára).

Vedle statistik pro celý soubor pozorování jsme uvedli ještě hodnoty pro dva podsoubory. V prvním jsou výnosy z let 1964-1978 a ve druhém výnosy z období 1979-1992. Toto oddělení jsme provedli, abychom posoudili stacionaritu dat. Na první pohled je zřejmé, že hodnoty vybraných statistik se pro oba podsoubory významně liší. Rozdělení výnosů v prvním podsouboru se příliš neodlišuje od normálního rozdělení. Koeficient špičatosti je blízko 3 a rozdělení je téměř symetrické. Volatilita výnosů měřená směrodatnou odchylkou je pro první podsoubor menší než pro druhý. Rozdělení výnosů z druhého podsouboru má podobné znaky jako rozdělení výnosů v celém souboru, je silně leptokurtózní a záporně zešikmené. Významné rozdíly mezi statistikami prvního a druhého podsouboru jsou

pravděpodobně do značné míry způsobeny tím, že druhý podsoubor obsahuje data z října 1987, kdy došlo k prudkému poklesu akciového trhu. Z pěti největších poklesů indexu ve sledovaném období (-22,80 % v pondělí 19.10.1987, -8,64 % v pondělí 26.10.1987, -7,00 % v pátek 8.1.1988, -6,31 % v pátek 13.10.1989 a -5,40 % v pátek 23.10.1987) došlo ke třem z nich v říjnu 1987 a všech pět spadá do druhého podsouboru. Rozdíly mezi dvěma podsoubory vyvolávají pochybnosti, zda lze přijmout předpoklad stacionarity výnosů. Výsledky dávají spíše za pravdu teoriím, které tvrdí, že kapitálový trh se může nacházet v rozmanitých stádiích, v nichž se výnosy chovají různě.

4.1 Autokorelace výnosů

Dále jsme sledovali korelogram časové řady výnosů. Chování autokorelační funkce může odhalit charakter lineární závislosti v datech. Za odhad autokorelační funkce jsme použili

$$\hat{\rho}_k = \frac{c_k}{c_0}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.3)$$

kde c_k je odhad autokovarianční funkce

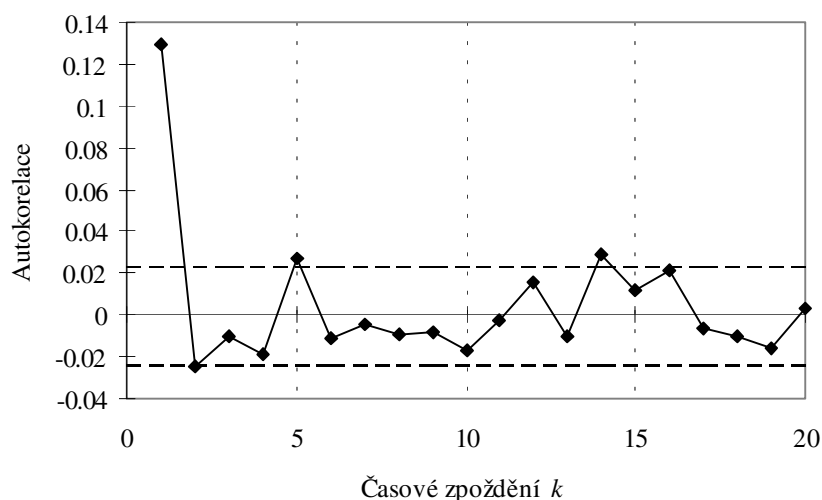
$$c_k = \sum_{t=1}^{n-k} \frac{(r_t - \bar{r})(r_{t+k} - \bar{r})}{n}. \quad (4.4)$$

V tabulce 2 jsou uvedeny odhady autokorelační funkce pro celý soubor a oba podsoubory a pro hodnoty $k = 1, 2, \dots, 5$, v korelogramu na obrázku 7 jsou hodnoty autokorelační funkce výnosů i pro vyšší hodnoty časového zpoždění. Z tabulky i korelogramu je patrná přítomnost krátkodobé korelace v časových řadách výnosů. Zejména hodnoty autokorelační funkce pro $k = 1$ jsou významně různé od nuly.

Kladná autokorelace výnosů akciových indexů pro malé hodnoty k je často dokumentovanou skutečností. Alespoň částečně ji lze vysvětlit asynchronním obchodováním. Ceny akcií, se kterými se obchoduje neustále, reagují velice rychle na nové informace, na druhé straně jsou v indexu zastoupeny emise s plytkým obchodováním, jejichž cena se přizpůsobuje novým informacím pomaleji. V důsledku pomalejšího přizpůsobování se ceny déle pohybují původním směrem. Asynchronní obchodování vede ke kladné autokorelaci výnosů [Ross 1992]. Pro větší k autokorelace výnosů prudce klesá a často je negativní. Někteří autoři zastávají názor, že negativní autokorelace je způsobena tzv. „přestřelováním“. Obchodníci reagují na nové zprávy impulzivně a velice často přeceňují jejich význam. Později, po důkladnější analýze důsledků nové informace, korigují předcházející kroky a výsledkem je reverzní pohyb ceny a negativní autokorelace výnosů. Rozdíly mezi dvěma podsoubory se projevují i v autokorelaci výnosů. V druhém podsouboru existuje silnější lineární závislost mezi výnosy.

k	1964-1992	1964-1978	1979-1992
1	0,1294*	0,2498*	0,0576*
2	-0,0259*	-0,0025	-0,0402*
3	-0,0112	0,0186	-0,0291
4	-0,0195	0,0153	-0,0405*
5	-0,0265*	-0,0154	0,0502*
směrodatná odchylka	0,0117	0,0163	0,0168

Tabulka 2 Autokorelační funkce výnosů akciového indexu S&P 500. Bartlettova aproximace byla použita ke stanovení směrodatné odchylky odhadů autokorelační funkce. Odhady označené hvězdičkou jsou statisticky signifikantní na hladině 5 % (dvoustranný test).



Obrázek 7 Korelogram řady výnosů indexu S&P 500 v období 1964-1992. Přerušované čáry vymezují 95 % interval spolehlivosti.

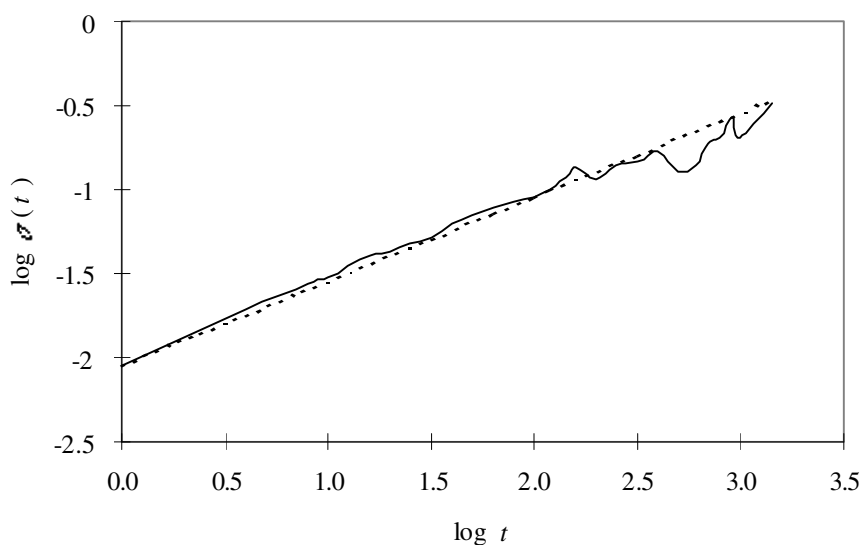
4.2 Časová struktura volatility

Hypotéza gaussovské náhodné procházky cen akcií je speciálním případem slabé formy efektivního trhu a v současnosti se obecně přijímá názor, že neplatí. Snažili jsme se prokázat její neplatnost pro námi zkoumaná data. Jestliže ceny akcií sledují gaussovskou náhodnou procházku, potom výnosy jsou nezávislé normálně rozdělené náhodné veličiny. Parametry normálního rozdělení jsou v čase konstantní. Pokud jsou náhodné veličiny nezávislé, potom rozptyl jejich součtu je roven součtu rozptylů jednotlivých náhodných veličin. Rozptyl dvoudenních výnosů by měl být tedy roven dvojnásobku rozptylu denních výnosů. V moderní teorii kapitálových trhů se za míru rizika častěji používá druhá odmocnina rozptylu, proto se obvykle tato zákonitost vyjadřuje pomocí směrodatné odchylky a nazývá

se „t na jednu polovinu“ (angl. t over one half nebo square root law). Formálně lze vzájemný vztah volatility v různých časových měřících zapsat:

$$\sigma_t = \sqrt{t} \cdot \sigma_1, \quad (4.5)$$

kde σ_1 je směrodatná odchylka jednodenních výnosů a σ_t směrodatná odchylka t -denních výnosů. V publikacích se lze často setkat s analýzou rizika tak, že se směrodatná odchylka měsíčních výnosů vynásobí odmocninou ze dvanácti.



Obrázek 8 Časová struktura rizika. Přerušovaná čára označuje vývoj směrodatné odchylky, jestliže platí hypotéza gaussovské náhodné procházky.

Zjistili jsme, že směrodatná odchylka výnosů indexu S&P 500 (obrázek 8) se v čase chová jinak, než by vyplývalo z hypotézy gaussovské náhodné procházky. Směrodatná odchylka roste s délkou časového kroku t rychleji. Její chování je však ještě komplikovanější. Z obrázku je dobře vidět, že pro t větší než přibližně 250 ($\log t > 2,4$) se křivka časové struktury rizika náhle stává plošší a rozkolísanější. K obdobnému zjištění dospěl [Peters 1994], který zkoumal časovou strukturu směrodatné odchylky výnosů indexu Dow Jones Industrial Average. Pracoval se souborem, který obsahoval denní výnosy indexu v období 1888 až 1990 (více než 25000 pozorování), a stejný pokles pozoroval pro t vyšší než přibližně 1000 (přibližně 4 roky). Nabízí se proto vysvětlení, že buď je námi pozorovaný jev uměle vyvolán omezenou velikostí datového souboru a ve skutečnosti k němu dochází pro větší t nebo vůbec neexistuje a také u citovaného autora je důsledkem omezeného množství dat. V našem případě máme například k dispozici pouze 7 tisícidenních výnosů, počítáme z nich výběrovou směrodatnou odchylku a předpokládáme, že je rovna skutečné. S tak malým počtem pozorování lze tento předpoklad snadno napadnout. K vyřešení tohoto problému by byl zapotřebí větší objem dat. V současné době není k

dispozici a proto nelze vyslovit konečný závěr. Peters ve své knize podává jedno z možných vysvětlení náhlého poklesu rizika pro investiční horizont delší než 4 roky. Domnívá se, že v dlouhém období je vývoj kapitálového trhu svázán s hospodářským cyklem, který je obecně méně volatilní než krátkodobé fluktuace na kapitálovém trhu, a proto jsou dlouhodobé investice méně rizikové než krátkodobé.

4.3 Skupinový test náhodnosti

Analýza autokorelační funkce výnosů prokázala, že řada výnosů není zcela nezávislá a minimálně výnosy v bezprostředně po sobě jdoucích dnech jsou na sobě lineárně závislé. Aby bylo možné stanovit směrodatnou odchylku odhadů autokorelační funkce s použitím Bartlettovy aproximace, měla by se předpokládat normalita uvažovaného procesu. S ohledem na pozorované rozdělení výnosů, není tento předpoklad snadné přijmout. Bylo by proto vhodné použít některý neparametrický test, který nepředpokládá konkrétní rozdělení. Použili jsme skupinový test náhodnosti. Skupina je definována jako posloupnost dat vykazujících shodné vlastnosti. Například řadu výnosů se znaménky „+++++---“ tvoří 4 skupiny. Očekávaný počet skupin pro náhodnou posloupnost výnosů je

$$\mu = \frac{2 \cdot p \cdot n}{n + p} + 1 \quad (4.6)$$

a směrodatná odchylka očekávaného počtu skupin se rovná

$$\sigma = \sqrt{\frac{2 \cdot p \cdot n \cdot (2 \cdot p \cdot n - p - n)}{(p + n)^2 \cdot (p + n - 1)}}, \quad (4.7)$$

kde p je počet kladných a n počet záporných výnosů. V řadě výnosů indexu S&P 500 je 3838 kladných a 3460 záporných. Proto $\mu = 3640,2$ a $\sigma = 42,6$. Skutečný počet skupin R v řadě výnosů je 3242. Statistika $(R - \mu) / \sigma$ má pro $p, n > 20$ normální rozdělení s parametry μ a σ . V našem případě lze na hladinách významnosti 5 % i 1 % zamítnout hypotézu, že řada výnosů je náhodná, protože počet skupin je menší než předpokládá nulová hypotéza.

4.4 BDS test

Testy, které jsme provedli, prokázaly, že výnosy indexu S&P 500 nejsou zcela nezávislé a v jejich pohybech lze pozorovat trendy. Ke stejným závěrům došli další autoři pro výnosy jiných akciových indexů i jednotlivých akcií. Z ekonomického hlediska je však závažnější skutečnost, že na této lineární závislosti nelze založit dlouhodobě ziskovou obchodní strategii. Otázkou zůstává, zda lineární závislost je jedinou strukturou v časové řadě výnosů. Pokud by to byla pravda, po odstranění této

závislosti by zbylá rezidua měla charakter bílého šumu. Z řady výnosů jsme pomocí autoregrese odstranili autoregresní složku a rovněž nenulovou střední hodnotu. Řád autoregresního modelu jsme stanovili pomocí informačních kritérií AIC a BIC. Obě kritéria určila jako nejvhodnější model AR(1). Základní popisné statistiky centrovaných reziduí z modelu AR(1) jsou uvedeny v tabulce 3.

	1964-1992
Počet pozorování	7297
Průměr	0
Medián	0,0001
Směrodatná odchylka	0,0089
Šikmost	-2,05
Špičatost	56,93
Maximum	0,0812
Minimum	-0,2212

Tabulka 3 Deskriptivní statistiky reziduí AR(1) modelu.

V dalších statistických testech jsme použili rezidua AR(1) modelu a pracovně jsme je označili jako upravené výnosy. Náš zájem se přesunul od lineární závislosti výnosů k potenciální nelineární struktuře ve sledovaných datech. Nelineární struktura v časové řadě výnosů je výsledkem složitých vztahů mezi obchodníky s různými investičními horizonty. BDS test jsme použili jako test nelinearity výnosů. BDS test (viz odstavec 3.1) je neparametrický test nulové hypotézy, že data jsou nezávislá a stejně rozdělená. Test dokáže odhalit lineární i nelineární závislost v datech. Aby mohl být použit jako test nelinearity, je třeba z dat odstranit lineární strukturu. Proto jsme test použili na upravené výnosy, které neobsahují lineární složku. Výsledky BDS testu pro různé hodnoty dimenze vnoření m a toleranční

m	ϵ/σ			
	0,50	1,00	1,50	2,00
2	12,48*	12,68*	13,47*	14,13*
3	17,78*	17,01*	17,64*	18,10*
4	23,15*	20,60*	20,58*	20,71*
5	30,57*	24,41*	23,24*	22,97*

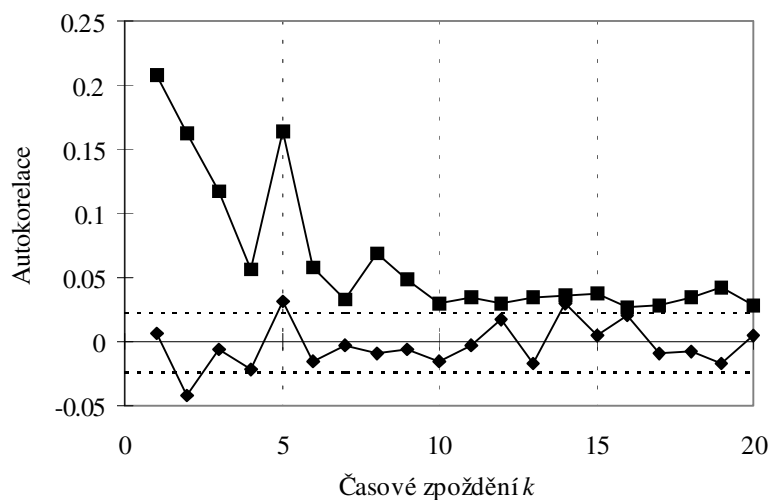
Tabulka 4 BDS test pro upravené výnosy indexu S&P 500. Hodnoty označené hvězdičkou jsou statisticky významné na hladině 1 % (dvoustranný test).

vzdálenosti vyjádřené násobkem směrodatné odchylky dat jsou uvedeny v tabulce 4.³¹ Ve všech případech je BDS statistika vyšší než kritická hodnota (2,58) a lze zamítnout nulovou hypotézu.

Nelineární závislosti je velmi široký pojem, kterým se označují všechny typy závislosti, které nejsou lineární. BDS test neposkytuje přímo informaci, který typ nelinearity způsobil zamítnutí nulové hypotézy. Obvykle jsou „v podezření“ nestacionarita dat, nelineární deterministická (chaotická) závislost a nelineární stochastická závislost. Na základě předchozích závěrů nelze nestacionaritu dat vyloučit, domníváme se však, že to není jediný zdroj nelinearity v datech.

4.5 Test přítomnosti procesu ARCH v datech

Při pohledu na časovou řadu výnosů si lze všimnout, že velké (malé) výnosy jsou obvykle následovány velkými (malými) výnosy s jakýmkoliv znaménkem. Tato tendence se nejčastěji vysvětluje podmíněnou heteroskedasticitou výnosů. Jinak vyjádřeno, rozptyl výnosů není stacionární, mění se v čase a rozptyl výnosů v současnosti závisí na určité informaci z minulého období. Zaměřili jsme pozornost na chování volatility upravených výnosů. Volatilitu jsme definovali jako druhou mocninu upravených výnosů. Korelogram volatility je na obrázku 9. Autokorelační funkce míry volatility je pro všechny hodnoty časového zpoždění k kladná a pomalu, přibližně hyperbolicky, klesá.



Obrázek 9 Korelogram upravených výnosů (♦) a jejich druhých mocnin (■). Přerušované čáry označují 95 % interval spolehlivosti hypotézy, že data jsou bílý šum.

³¹ Použili jsme počítačový program, jehož autorem je W. Dechert. Verze pro operační systém MS-DOS je umístěna v síti Internet na adrese <ftp://gopher.econ.wisc.edu/WWW/software/bds/dos/>.

Engle³² navrhl test nulové hypotézy, že data jsou podmíněně homoskedastická, založený na Lagrangeových multiplikátorech. Aplikovali jsme tento test na upravené výnosy. Nejprve jsme provedli regresi druhých mocnin upravených výnosů na zpožděné hodnoty a konstantu

$$e_t^2 = 0,0001 + 0,1951 \cdot e_{t-1}^2$$

(9,06) (16,99)

(4.8)

$$R^2 = 0,0381, \quad T = 7296.$$

V závorkách jsou hodnoty t-statistiky odhadnutých koeficientů a T je počet pozorování. Engle definoval statistiku $T \cdot R^2$, která má asymptoticky rozdělení χ^2 s jedním stupněm volnosti. Pro upravené výnosy je statistika rovna 277,7 a kritická hodnota na úrovni 1 % je 6,64. Lze zamítnout nulovou hypotézu a přijmout alternativní hypotézu, že v datech je přítomen proces ARCH(1). Z hodnoty testové statistiky a průběhu autokorelační funkce lze usoudit, že proces ARCH bude vyššího řádu.

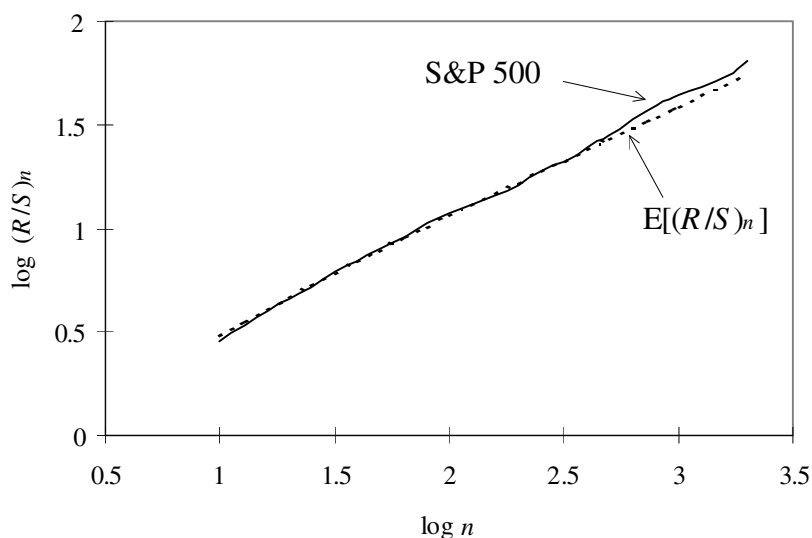
4.6 Dlouhodobá paměť výnosů a volatility

Dosud jsme analyzovali krátkodobé chování výnosů. Zjistili jsme, že výnosy v po sobě jdoucích dnech jsou lineárně závislé a dále jsme odhalili systematickou složku ve volatilitě výnosů. V posledním kroku analýzy výnosů indexu S&P 500 jsme se snažili odpovědět na otázku, jak se chovají výnosy a volatilita v dlouhém období. Jestliže řada výnosů neobsahuje jinou strukturu, než kterou jsme dosud objevili, platila by v dlouhém období hypotéza náhodné procházky. Na základě některých indicií jsme očekávali, že určitý druh závislosti existuje ve výnosech i v dlouhém období. Například autokorelační funkce volatility klesá pomaleji, než autokorelační funkce procesů autoregresní podmíněné heteroskedasticity.

Vhodným nástrojem k detekci dlouhodobé paměti v časových řadách je R/S analýza a Hurstův exponent. Nejprve jsme se zajímali o dlouhodobé chování výnosů. Pracovali jsme s upravenými výnosy, které neobsahují krátkodobou paměť. Na obrázku 10 jsou hodnoty R/S statistiky a její očekávané hodnoty $E(R/S)$ pro různé délky časového kroku (měřítka) n .

Tabulka 5 obsahuje odhady regresních koeficientů ve vztahu (3.23) pro R/S statistiky upravených výnosů indexu S&P 500 i pro odpovídající očekávané hodnoty $E(R/S)$. Směrodatná

³² ENGLE, R. F.: Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50, 1982, s. 987-1008.



Obrázek 10 R/S analýza pro upravené výnosy indexu S&P 500.

	S&P 500	E(R/S)
konstanta c	-0,0868	-0,0359
Hurstův exponent H	0,5722	0,5425
R^2	0,9987	0,9993

Tabulka 5 Odhady regresních koeficientů ve vztahu (3.23) pro upravené výnosy indexu S&P 500.

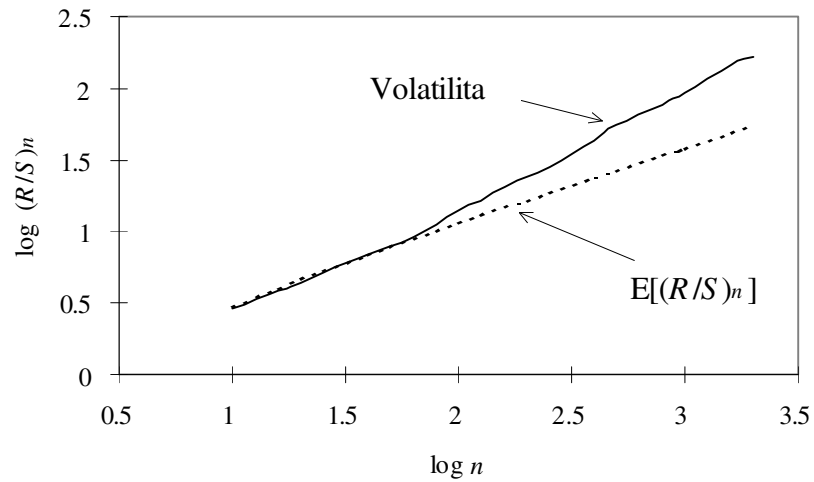
odchylka očekávané hodnoty Hurstova exponentu σ_H je 0,0117 (odmocnina z 1 / 7296) a lze na hladině 5 % zamítnout hypotézu, že výnosy indexu S&P 500 se v dlouhém období chovají jako náhodná procházka.

	Volatilita	E(R/S)
konstanta c	-0,4019	-0,0359
Hurstův exponent H	0,7858	0,5425
R^2	0,9961	0,9993

Tabulka 6 Odhady regresních koeficientů ve vztahu (3.23) pro volatilitu upravených výnosů indexu S&P 500.

Stejný postup, který jsme provedli pro upravené výnosy indexu S&P 500, jsme zopakovali pro druhými mocninami upravených výnosů, které jsme používali jako míru volatilitu. Obrázek 11 ukazuje vývoj R/S statistiky a její očekávané hodnoty $E(R/S)$ v závislosti na délce časového kroku n a tabulka 6

shrnuje výsledky odhadu Hurstova exponentu pro volatilitu výnosů. Směrodatná odchylka odhadu je opět rovna 0,0117. Odhad Hurstova exponentu je vysoce signifikantní a lze přijmout hypotézu dlouhodobé paměti v procesu volatilitu.



Obrázek 11 R/S analýza volatilitu upravených výnosů indexu S&P 500.

5. Nové teorie kapitálového trhu

Na počátku devadesátých let se nezávisle na sobě objevily dvě nové teorie, které si kladou za cíl popsat chování kapitálového trhu a nahradit hypotézu efektivního trhu. Jsou to hypotéza koherentního trhu, jejímž autorem je Tonis Vaga [Vaga 1994] a hypotéza fraktálového trhu Edgara Peterse [Peters 1994]. Obě vycházejí z teorie nelineárních dynamických systémů, každá však přistupuje k dané problematice z jiného pohledu a zdůrazňuje jiné rysy těchto systémů. Nové teorie jsou reakcí na události na kapitálových trzích v říjnu 1987, které nebylo možné uspokojivě vysvětlit v kontextu hypotézy efektivního trhu.

5.1 Hypotéza koherentního trhu

Vaga se nechal inspirovat Isingovým modelem feromagnetismu. Nebylo to poprvé, co si tento fyzikální model „vypůjčili“ odborníci z jiných vědních disciplín, aby vysvětlili jevy, se kterými se setkávali ve svých oborech. V sedmdesátých letech na základě Isingova modelu vysvětlil německý fyzik Wolfgang Weidlich z university ve Stuttgartu proces polarizace názorů v sociálních skupinách a američtí vědci Earl Callen a Don Shapero využili stejný model ve své teorii sociální imitace v biologických a sociálních skupinách.³³ Isingův model i hypotéza koherentního trhu zdůrazňují jednu ze základních charakteristických vlastností nelineárního dynamického systému, kterou je jeho schopnost existovat v různých stavech. Nelineární dynamický systém může být ve stavu neuspořádanosti a v jiném okamžiku může přejít do stavu vnitřní uspořádanosti. Během přechodu z jednoho stavu do druhého dochází k významným makroskopickým změnám. Jako příklad může sloužit vznik vnějšího magnetického pole v okolí kousku železa. Železo obsahuje tzv. domény (oblasti o miliónech atomů, jejichž elementární magnety jsou souhlasně orientovány), které jsou v nezmagnetizovaném vzorku náhodně orientovány (neuspořádaný stav). V silném vnějším magnetickém poli se domény zorientují jedním směrem a po zrušení pole si domény toto seřazení do určité míry zachovávají (uspořádaný stav). Navenek se to projeví magnetickým polem. Vaga přišel s myšlenkou, že k podobným přechodům dochází i na kapitálovém trhu.

Hypotéza koherentního trhu má jeden rys, který by nové teorie měly mít. Splňuje princip korespondence vyjadřující relativní souhlas vědeckých teorií na kvalitativně různých stupních vývoje. Stará teorie, hypotéza efektivního trhu, se jeví jako zvláštní případ novější a obecnější hypotézy koherentního trhu, podobně jako relativistická fyzika souhlasí pro malé rychlosti s klasickou fyzikou. V

³³ WEIDLICH, W.: The Statistical Description of Polarization Phenomena in Society. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 24, 1971. CALLEN, E. - SHAPERO, D.: A Theory of Social Imitation. *Physics Today*, July 1974.

jakém stavu se trh aktuálně nachází, je dáno hodnotami řídicích parametrů. V modelu koherentního trhu jsou řídicími parametry technické a fundamentální faktory. Proto je zřejmé, že v kontextu hypotézy koherentního trhu mají technická i fundamentální analýza své opodstatnění. Navíc se ukazuje, že k dokonalému pochopení stavu, v němž se kapitálový trh nachází, nestačí používat pouze jednu z analýz, je potřeba je používat dohromady. První řídicí parametr souvisí s technickými faktory, v modelu je označen k a může nabývat hodnot od 1,8 do 2,2. Technickými faktory jsou intenzita skupinového chování účastníků trhu a úroveň likvidity. Druhý řídicí parametr označovaný h se vztahuje k fundamentální situaci ekonomického prostředí. Nabývá hodnot od -0,02 do +0,02. Konkrétní hodnoty, kterých mohou parametry nabývat, jsou převzaty z původního modelu a nemají ekonomické vysvětlení. Veličinou, která charakterizuje stadium, ve němž se celý kapitálový trh nachází, je výnos burzovního indexu. Hypotéza koherentního trhu respektuje skutečnost, že kapitálový trh je otevřený systém, který je vystaven působení vnějších nepredikovatelných vlivů. Projevuje se to tím, že model je pravděpodobnostní. Výnos je náhodná veličina s vlastním pravděpodobnostním rozdělením, jehož tvar se v různých stavech trhu liší. Hustotu výnosů (anualizovaných) lze v modelu koherentního trhu formálně zapsat

$$f(r) = \frac{\exp\left(2 \cdot \int_{-0,5}^r \frac{K(y)}{Q(y)} dy\right)}{C(r) \cdot Q(r)}, \quad (5.1)$$

kde

$$K(r) = \sinh(k \cdot r + h) - 2 \cdot r \cdot \cosh(k \cdot r + h), \quad (5.2)$$

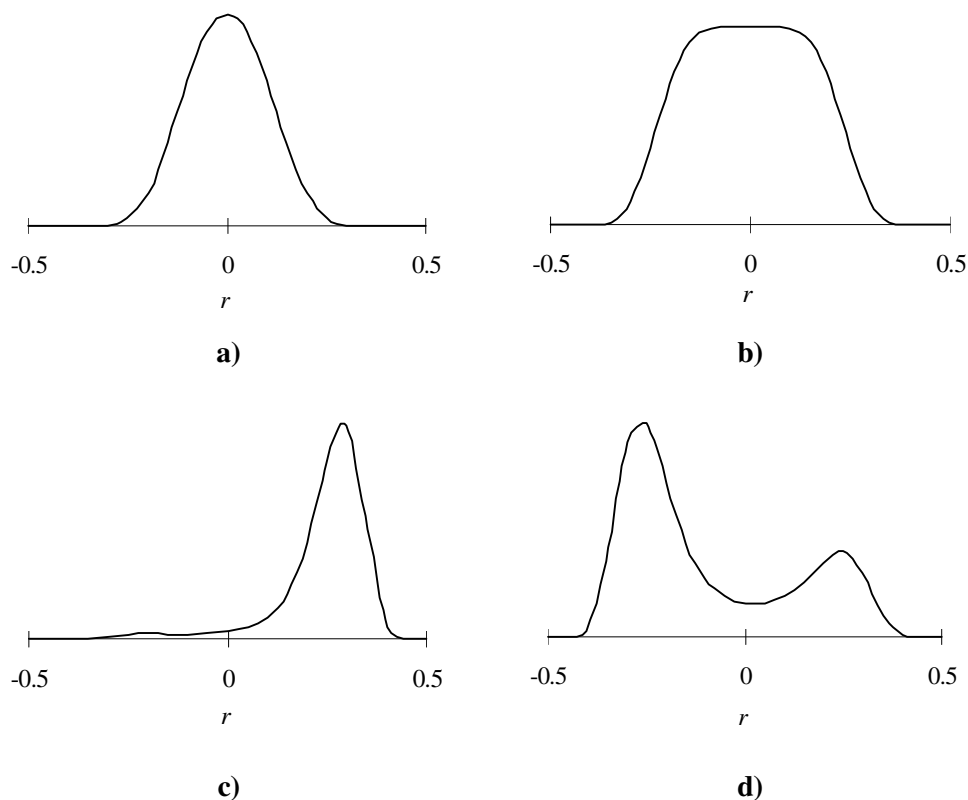
$$Q(r) = 1/n \cdot [\cosh(k \cdot r + h) - 2 \cdot r \cdot \sinh(k \cdot r + h)], \quad (5.3)$$

$$C(r) = \int_{-0,5}^{0,5} \frac{\exp\left(2 \cdot \int_{-0,5}^r \frac{K(y)}{Q(y)} dy\right)}{Q(r)} dr. \quad (5.4)$$

Parametr n udává počet stupňů volnosti neboli složitost systému v neuspořádaném stavu a Vaga zvolil pro svůj model hodnotu 186. Číslo vyjadřuje přibližný počet nezávislých odvětví v ekonomice.

Kapitálový trh se může nacházet ve čtyřech základních stavech, z nichž každé se vyznačuje jiným pravděpodobnostním rozdělením výnosů (viz obrázek 12). První stadium je klasický efektivní trh ($k = 1,8$). Pro tento trh je charakteristická absence skupinového jednání agentů. Všichni investoři se chovají racionálně a trh jako celek rychle vstřebává nové informace. Výnosy se chovají podle normálního rozdělení, výnosy i riziko jsou malé. Pro spekulanty je efektivní trh nepřitelem. Obchodní

strategie generují na efektivním trhu často falešné signály, což vede k vysokým transakčním nákladům a zápornému čistému zisku spekulanta. Fundamentální faktory mohou sice vychýlit střední hodnotu rozdělení, ale bez přítomnosti zesilovacího efektu davového chování nemají výraznější vliv na výši očekávaného výnosu.



Obrázek 12 Pravděpodobnostní rozdělení analizovaných výnosů v různých stádiích kapitálového trhu: **a)** efektivní trh ($k = 1,8$, $h = 0$), **b)** přechodový stav ($k = 2$, $h = 0$), **c)** koherentní býčí trh ($k = 2,2$, $h = 0,02$), **d)** chaotický trh ($k = 2,2$, $h = -0,005$).

Druhý stav, který může na kapitálovém trhu nastat, představuje přechod od neuspořádanosti k řádu. Projevuje se nestabilitou očekávání investorů. Trh přecitlivěle reaguje na nové zprávy. Vnější důsledkem je velká volatilita výnosů, rozdělení výnosů je přibližně rovnoměrné (obrázek 12b). Kapitálový trh je v tomto stadiu silně neefektivní, protože nové informace se do cen promítají pomalu a ne vždy korektně. Účinek fundamentálních faktorů je na přechodovém trhu velmi významný a může výrazně vychýlit střední hodnotu výnosů. Způsobuje to rostoucí vliv sdílení názorů mezi investory, jehož výsledkem je pozitivní zpětná vazba, která účinek fundamentálních faktorů zesiluje.

Z hlediska obchodníků je nejzajímavějším stavem koherentní trh. Vzniká, jestliže na kapitálovém trhu převládá davové chování a existují silně vychýlené fundamentální ukazatele, které určují převládající trend v pohybu trhu. Pravděpodobnostní rozdělení výnosů se mění na bimodální. Existují

dva stabilní body, které jsou vzdálené od původní rovnováhy. Silně vychýlené fundamentální faktory však způsobují, že pravděpodobnost jednoho ze stabilních stavů je výrazně vyšší než druhého. Jestliže jsou fundamentální faktory kladné, vzniká koherentní býčí trh (obrázek 12c), záporné fundamentální ukazatele dávají vzniknout koherentnímu medvědímu trhu. Klasický vztah mezi výnosem a rizikem je v koherentním stadiu převrácen a vyššího výnosu lze dosáhnout bez přijetí vyššího rizika. V praxi vzniká častěji koherentní býčí trh, medvědí koherentní stadium je méně obvyklé.

Chaotický trh představuje čtvrté stadium, které může na kapitálovém trhu nastat, a z hlediska obchodníka je to nejnebezpečnější situace. Chaotický trh vzniká, jestliže intenzita skupinového chování je velmi vysoká, ale fundamentální faktory nejsou jednoznačně příznivé nebo nepříznivé. Pravděpodobnostní rozdělení výnosů charakteristické pro tento typ trhu je na obrázku 12d. Existují dvě stabilní úrovně výnosů, které mohou nastat s přibližně stejnou pravděpodobností. Extrémní výnosy (kladné nebo záporné) jsou pravděpodobnější než nulový výnos. V pohybu cen je výrazný trend, který však je, na rozdíl od trendu na koherentním trhu, obvykle krátkodobý, a slabý impuls může způsobit přechod z jednoho stabilního stavu do druhého. Přechod trhu z koherentního býčího do chaotického stadia je úrodnou půdou pro vznik různých mánií a následných krachů na kapitálovém trhu. Ke krizovým situacím dochází, protože jednání investorů ovládá davové chování, avšak informace jsou investory nesprávně interpretovány. Potom stačí minimální stimul a trend uměle udržovaný davem se náhle dokonale převrátí.

Leptokurtóza rozdělení výnosů je podle hypotézy koherentního trhu způsobena jejich různým rozdělením v jednotlivých stadiích. Pravděpodobnost extrémních výnosů je v některých stavech trhu větší než u normálního rozdělení. Pokud sledujeme rozdělení výnosů v delším časovém horizontu, směšujeme výnosy, jejichž rozdělení není stejné, a důsledkem této agregace jsou široká okrajová pásma výsledného rozdělení. Bohužel toto vysvětlení je v nejlepším případě neúplné. Mohutné chvosty totiž vykazují i rozdělení vysokofrekvenčních výnosů v krátkém časovém období, během něhož by měl podle teorie trh setrvat v jednom stadiu (viz [Mantegna-Stanley 1995]).

V kontextu hypotézy koherentního trhu podal Tonis Vaga [Vaga 1994] jedno z možných vysvětlení krachu na newyorské burze v říjnu 1987. Od ledna do června roku 1987 vzrostl kapitálový trh, měřeno akciovým indexem Standard & Poor's 500, o téměř 25 % a ekonomická situace USA byla příznivá. Přibližně v polovině roku se fundamentální situace začala zhoršovat. Úrokové míry začaly růst, ale kapitálový trh nadále rostl. Trend se nezměnil ani poté, co v září zvýšil Federální rezervní systém diskontní sazbu. Vaga se domnívá, že optimismus z první poloviny roku byl uměle udržován davovým chováním, přestože se fundamentální faktory se změnily. Říjnový krach byl způsoben náhlým „zmoudřením“ investorů, kteří si uvědomili, že trh jde proti reálnému ekonomickému vývoji.

Jestliže se reálný kapitálový trh chová podle hypotézy koherentního trhu, má to některé důsledky pro úspěšné obchodování. Technická a fundamentální analýza, které považují stoupenci hypotézy efektivního trhu za zbytečně vynaložené úsilí a peníze, nabývají v rámci modelu koherentního trhu na důležitosti. K pochopení stavu, ve kterém se kapitálový trh nachází, je třeba používat obě analýzy, protože jejich informace se vzájemně doplňují. Z hypotézy koherentního trhu také vyplývá, že pro každý stav trhu je nejlepší jiná investiční strategie. Například pro koherentní trh je nejlepší investovat ve směru trendu. Naopak na chaotickém trhu je tato strategie vysoce riziková a z dlouhodobého hlediska téměř vždy ztrátová. Ve stavu efektivního trhu je zase lepší dát přednost pasivní strategii před aktivní, protože jsou s ní spojeny minimální transakční náklady.

Otázkou zůstává, jak stanovit hodnoty parametrů k a h pro reálný kapitálový trh? Jinak řečeno, jak určit, ve kterém stadiu se trh nachází? V úvahu připadají dva přístupy. První možností je odhadnout parametry k a h na základě rozdělení výnosů v nejbližších minulých obdobích. Tento přístup však naráží na věčný problém neexperimentálních oborů, kterým je omezená množina dat. V rámci řešení jiného problému použili tuto metodu [Steiner-Wittkemper 1994] k určení stavu německého kapitálového trhu. Pravděpodobnostní rozdělení „rekonstruovali“ na základě výnosů v posledních 42 obchodních dnech. Pro období od července 1991 do dubna 1994 zjistili, že hodnoty parametru k se, s výjimkou několika krátkých období, pohybovaly v intervalu od 1,8 do 1,85. Úroveň skupinového chování byla tedy ve sledovaném období velmi nízká a německý kapitálový trh byl efektivní. Hodnoty parametru h nabývaly ve stejném období hodnot od -0,01 do 0,008.

Druhý způsob určení aktuálního stavu kapitálového trhu spočívá v nalezení proměnných nebo indikátorů, které by popisovaly fundamentální situaci a úroveň koherentního chování a nahrazovaly hodnoty parametrů k a h . Například oscilátor klouzavých průměrů, klasický nástroj technické analýzy, může zastupovat parametr k a vývoj úrokových sazeb dobře vystihuje fundamentální situaci.

5.2 Hypotéza fraktálového trhu

Hypotéza koherentního trhu kladla při popisu chování kapitálového trhu důraz na celkové ekonomické klima a úroveň skupinového jednání účastníků trhu. Různorodost investorů nebyla z hlediska celkového chování trhu důležitá. Druhá z nových teorií, hypotéza fraktálového trhu, naopak zdůrazňuje vliv likvidity a investičního horizontu na fungování trhu. Stabilita kapitálového trhu je podle této teorie z hlediska hladkého fungování důležitější než jeho efektivnost. Základním předpokladem stability je likvidita. Likviditu nelze zaměňovat za velký objem. Likviditou se rozumí rovnováha nabídky a poptávky. V konečném důsledku likvidita zajistí, že cena, za kterou se obchoduje, bude přibližně „spravedlivá“ ve smyslu modelu efektivního trhu. Je dobré připomenout, že klasická teorie kapitálového trhu se otázkou likvidity nezabývá, protože implicitně předpokládá, že je jí vždy dostatek. Peters je

přesvědčen, že příčinou většiny krizí na kapitálových trzích je nízká likvidita. Protože klasická teorie úlohu likvidity nedoceníla, nedokáže krizové stavy uspokojivě vysvětlit.

Likvidita je zajištěna přítomností investorů s různým investičním horizonty. Rozsah investičních horizontů sahá od několika minut u spekulantů využívajících cenových pohybů během dne po několik let u dlouhodobých investorů, jakými jsou například penzijní fondy. Rozmanitost investičních horizontů způsobí, že investor, který chce uzavřít obchod, nalezne protistranu. Uvažujme situaci, kdy cena akcie náhle poklesne o několik desetin procenta. Z hlediska krátkodobého spekulanta se jedná o výjimečnou událost a pokud by pokles pokračoval, mohl by výrazně ztratit. Proto se rozhodne cenný papír prodat. Jestliže by všichni investoři na trhu měli stejný investiční horizont, nenašel by se zájemce, který by cenný papír odkoupil. Naštěstí existují investoři s dlouhým investičním horizontem, pro které představuje pokles pouze krátkodobou cenovou korekci, po níž bude v delším období následovat růst.

Stejně jako model koherentního trhu i hypotéza fraktálového trhu neodmítá technickou a fundamentální analýzu. Předpokládá však, že pro každý investiční horizont existuje charakteristický typ analýzy trhu, na rozdíl od modelu koherentního trhu, v jehož kontextu se oba typy analýzy doplňují. Krátkodobí spekulanti se rozhodují zpravidla na základě minulých cenových pohybů, používají nástroje technické analýzy, na druhé straně z hlediska dlouhodobých investorů je důležitější růstový potenciál firmy a proto se využívají postupy fundamentální analýzy.

Peters sledoval rozdělení výnosů indexu DJIA z období 1888-1991 v různých časových měřítkách (od jednodenních po devadesátidenní) a zjistil, že po zohlednění časového měřítka jsou rozdělení velice podobné. Například pravděpodobnost výnosu -3σ , kde σ je výběrová směrodatná odchylka výnosů pro dané časové měřítko, je pro všechny investory stejná. Objekty, které si při změně měřítka zachovávají charakteristické rysy, se nazývají fraktály. Peters označil trh, na kterém jsou agenti s různými investičními horizonty, jako fraktálový, protože si zachovává v různých časových měřítkách stejné statistické charakteristiky. Fraktálové struktury jsou obecně velmi stabilní, jsou znakem „zdravé“ dynamiky a běžně se vyskytují v přírodě (např. větvičí se síť bronchiálních trubic v lidském těle). Problémy nastávají, jestliže je fraktálová struktura kapitálového trhu narušena. Jinými slovy, jestliže chybí skupina dlouhodobých investorů, kteří jsou hlavním zdrojem likvidity pro krátkodobé obchodníky. K takové situaci dochází, jestliže se dlouhodobí investoři začnou domnívat, že fundamentální informace, na jejichž základě se rozhodují, přestávají být důležité nebo jsou nespolehlivé. Dlouhodobí investoři potom zůstávají mimo trh nebo se z nich stanou krátkodobí investoři rozhodující se podle technických indikátorů. Trh se přestává vyčišťovat, protože všichni účastníci na trhu mají nyní jediný investiční horizont a chybí jedna strana obchodu. Jestliže dojde k sjednocení investičních horizontů, dochází na

trhu podle Peterse k „volnému pádu“ cen a výsledkem jsou nespojitosti v řadě cen. Velké cenové změny způsobí, že rozdělení výnosů má širší okrajové části.

Peters tvrdí, že k sjednocení horizontů všech účastníků trhu došlo v říjnu 1987. Dlouhodobí investoři začali vážně pochybovat o dlouhodobějších vyhlídkách trhu v souvislosti s vysokými cenami akcií na jedné straně a restriktivní monetární politikou na straně druhé. Když začali krátkodobí investoři prodávat, nechtěli dlouhodobí investoři tyto akcie kupovat, protože cena podle nich byla vysoká. Nastal pád trhu o více než 20 %, který se zastavil v okamžiku, kdy dlouhodobí investoři považovali ceny dostatečně nízké, aby se vrátili na trh a začali nakupovat.

6. Závěr

V diplomové práci jsme na vybraných problémech nastínili dopad současných trendů v nelineární vědě na teorii kapitálových trhů. Tento přístup pomohl ekonomům uvědomit si, že zdánlivá náhodnost v časových řadách výnosů může být, alespoň do jisté míry, výsledkem skryté nelineární struktury. Zároveň by mělo být z předchozích částí zřejmé, že se jedná o velmi rozsáhlou oblast, jejíž výzkum je teprve na začátku. Novost tohoto přístupu se projevuje v určité rozpornosti výsledků. Většina otázek ještě není definitivně zodpovězena. Jako příklad lze uvést mohutné okrajové části rozdělení výnosů nebo problém stacionarity řady výnosů v delším období.

Chtěli bychom na závěr upozornit na dvě oblasti, jejichž rozvoj byl stimulován dosavadními výsledky studia nelinearity na kapitálových trzích:

1. *Rozvoj ekonomických teorií založených na adaptivních očekáváních.* Opakuje se situace z počátků klasické teorie chování cen na kapitálových trzích. Existuje velký počet statí, které na základě statistické analýzy empirických dat zjistili určité jevy, ale chybí teoretický ekonomický model, který by je uspokojivě vysvětlil. Ve většině prací proto převládá empiricko statistický přístup. V poslední době však roste počet statí, v nichž se autoři snaží navrhnout teoretické modely, jejichž chování by se shodovalo s jevy, které lze pozorovat na reálném kapitálovém trhu. Nové teorie opouští předpoklad homogenních agentů a pracují s koncepty adaptivních očekávání a heterogenních investičních horizontů.
2. *Zájem o technickou analýzu mezi akademickou obcí a aplikace neuronových sítí na kapitálových trzích.* Myšlenka, že výnosy jsou generovány z procesu, který je alespoň částečně predikovatelný, dává novou naději technické analýze. Dosavadní výsledky pokusů předpovídat budoucí výnosy na základě historických výnosů, například s použitím rekonstruovaného stavového prostoru, nejsou uspokojivé. Zároveň však někteří autoři uvedli, že predikovatelnost výnosů roste, jestliže se využije vhodná doplňková informace. V této oblasti se také ukazuje možnost využití neuronových sítí na kapitálových trzích. Žádný ze „standardních“ modelů časových řad nedokáže zachytit veškerou strukturu, kterou řada výnosů obsahuje. Bylo dokázáno, že vícevrstvé neuronové sítě mohou pracovat jako univerzální aproximátory. Dokážou aproximovat s libovolnou přesností jakýkoliv funkční předpis. Mohou proto překonat omezenost standardních modelů. Za předpokladu nestacionarity dat je užitečná také jejich adaptabilita. Mohou se během činnosti doučovat a přizpůsobit se tak novým podmínkám.

Literatura

BRADA, J.: Indikátory koupě a prodeje cenných papírů jako základní nástroje technické analýzy burzovních indexů. *Finance a úvěr*, 43, 1993, č. 10, s. 445-454.

BREALEY, R. - MYERS, S.: Teorie a praxe firemních financí. Praha, Victoria Publishing 1992, 971 s.

BROCK, W. A.: Pathways to Randomness in the Economy: Emergent Nonlinearity and Chaos in Economics and Finance. *Estudios Economicos*, 8, 1993, č. 1, s. 3-55.

BROCK, W. A.: Asset Price Behavior in Complex Enviroments. (Working Paper 96-04-018), Santa Fe, Santa Fe Institute 1996, 36 s.

BROCK, W. A. - DECHERT, W. D. - SCHEINKMAN, J. A. - LEBARON, B.: A Test for Independence Based on the Correlation Dimension. *Econometric Reviews*, 15, 1996, č. 3, s. 197-235.

BROCK, W. A. - DE LIMA, P.: Nonlinear Time Series, Complexity Theory, and Finance. In Handbook of Statistics Volume 14: Statistical Methods in Finance. Ed. G. Maddala, C. Rao. New York, North Holland 1996, 756 s.

BROCK, W. A. - LAKONISHOK, J. - LEBARON, B.: Simple Technical Trading Rules and the Stochastic Properties of Stock Returns. *Journal of Finance*, 47, 1992, č. 5, s. 1731-1964.

FAMA, E. F.: Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*, 25, May 1970, s. 383-417.

FARMER, J. D. - SIDOROWICH, J. J.: Predicting Chaotic Time Series. *Physical Review Letters*, 59, 1987, č. 8, s. 845-848.

FULLER, R. J. - FARRELL JR., J. L.: Modern Investment Theory and Security Analysis. New York, McGraw-Hill 1987, 666 s.

GLEICK, J.: Chaos. Vznik nové vědy. Brno, Ando Publishing 1996, 350 s.

GOLDBERG, M. - SCHULMEISTER, S.: Technical Analysis and Stock Market Efficiency. (Working Paper 88-21), New York, New York University, C. V. Starr Center 1988, 68 s.

GREEN, W. H.: Econometric Analysis. New York, Macmillan 1990, 791 s.

GUILLAUME, D. M. - PICTET, O. V. - MÜLLER, U. A. - DACOROGNA, M. M.: Unveiling Nonlinearities Through Time Scale Transformations. (Internal document OPV.1994-06-26), Zürich, Olsen & Associates 1994, 11 s.

HARRINGTON, D. R.: Modern Portfolio Theory and the Capital Pricing Model. Englewood Cliffs, Prentice Hall 1983, 135 s.

- HORGAN, J.:** From Complexity to Perplexity. *Scientific American*, 272, 1995, č. 6, s. 74-79.
- HSIEH, D. A.:** Chaos and Nonlinear Dynamics: Application to Financial Markets. *Journal of Finance*, 46, 1991, č. 5, s. 1839-1877.
- KENNEL, M. B.:** The Multiple Dimension Mutual Information Program. The Institute for Nonlinear Science, University of California, San Diego 1992. (K dispozici v síti Internet na adrese ftp://inls.ucsd.edu/pub/inls-ucsd/mmi.tar.Z.)
- KENNEL, M. B. - BROWN, R. - ABARBANEL, H.:** Determining Embedding Dimension for Phase Space Reconstruction Using a Geometrical Construction. *Physical Review A*, 45, 1992, č. 6, s. 3403-3411.
- KOČENDA, E.:** Nelineární struktura směnného kurzu české koruny ve vazbě na měnový koš. *Politická ekonomie*, 44, 1996, č. 1, s. 58-72.
- KOHOUT, P.:** Nelineární CAPM. *Finance a úvěr*, 45, 1995, č. 8, s. 429-440.
- LEBARON, B.:** Empirical Evidence for Nonlinearities and Chaos in Economic Time Series: A Summary of Recent Results. (Working Paper 9117), Madison, Social Systems Research Institute at University of Wisconsin 1991, 33 s.
- LEBARON, B.:** Chaos and Nonlinear Forecastability in Economics and Finance. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A 348, 1994, č. 1688, s. 397-404.
- MACKAY, M. C. - GLASS, L.:** Oscillation and Chaos in Physiological Control Systems. *Science*, 197, 1977, č. 4300 (15th July), s. 287-289.
- MALKIEL, B.:** A Random Walk Down Wall Street. New York, W. W. Norton & Company 1990, 440 s.
- MANTEGNA, R. N. - STANLEY, H. E.:** Scaling Behaviour in the Dynamics of an Economic Index. *Nature*, 376, 1995, č. 6535 (6th July), s.46-49.
- MÜLLER, U. A. - DACOROGNA, M. M. - DAVÉ, R. D. - PICTET, O. V. - OLSEN, R. B. - WARD, J.R.:** Fractals and Intrinsic Time - A Challenge to Econometricians. (Internal document UAM.1993-08-16). Zürich, Olsen & Associates 1993, 23 s.
- OLSEN, R. B. - DACOROGNA, M. M. - MÜLLER, U. A. - PICTET, O. V.:** Going Back to the Basics - Rethinking Market Efficiency. (Internal document RBO.1992-09-07). Zürich, Olsen & Associates 1992, 6 s.
- PEITGEN, H.-O. - JÜRGENS, H. - SAUPE, D.:** Fractals for the Classroom. Part Two: Complex Systems and Mandelbrot Set. New York, Springer-Verlag 1992, 500 s.

PETERS, E. E.: Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics. New York, Wiley 1994, 315 s.

PŘIBYL, P.: Pomocník, nikoliv nepřítel. Teorie chaosu obohatila metodologii vědy i praxi. *Ekonom*, 39, 1995, č. 47, s. 56-57.

ROSS, S. A.: Stock Market Indices. In The New Palgrave Dictionary of Money and Finance. Vol. 3 N-Z. Ed. P. Newman, P. Milgate, M. Eatwell. London, Macmillan 1992, s. 582-588.

RÖSSLER, O. E.: An Equation for Continuous Chaos. *Physics Letters*, 57A, 1976, č. 5 (12th July), s. 397-398.

SCHEINKMAN, J. A. - LEBARON, B.: Nonlinear Dynamics and Stock Returns. *Journal of Business*, 62, 1989, č. 3, s. 311-337.

SHARPE, W. F. - ALEXANDER, G. S.: Investice. Praha, Victoria Publishing 1994, 810 s.

SIRLANTZIS, K. - SIRIOPOULOS, C.: Deterministic Chaos in Stock market: Empirical Results from Monthly Returns. *Neural Network World*, 3, 1993, č. 6, s. 855-864.

STEINER, M. - WITTKEMPER, H.-G.: Asset Allocation with a Neural Network. Implementation of the Coherent Market Hypothesis. In *Proceedings of the Second International Conference on Neural Networks in the Capital Markets*. Pasadena 1994.

SUGIHARA, G.: Nonlinear Forecasting for the Classification of Natural Time Series. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A 348, 1994, č. 1688, s. 477-495.

SUGIHARA, G. - MAY, R. M.: Nonlinear Forecasting as a Way of Distinguishing Chaos from Measurement Error in Time Series. *Nature*, 344, 1990, č. 6268 (19th April), s. 734-741.

VAGA, T.: Profiting from Chaos: Using Chaos Theory for Market Timing, Stock Selection, and Option Valuation. New York, McGraw-Hill 1994, 249 s.

Příloha

```
% ROSSLER.M
iteraci = input('Počet iterací: ');
% Parametry Rösslerova systému
a = 0.2;
b = 0.2;
c = input('Hodnota parametru c: ');
% Počáteční podmínky
xn = 0;
yn = 1;
zn = 0;
% Časový krok
dt = 0.04;
dt2 = dt/2;
% Deklarace polí
x = zeros(1,iteraci-2000);
y = zeros(1,iteraci-2000);
z = zeros(1,iteraci-2000);
% Hlavní cyklus programu
for i = 1:iteraci
    % Používá se lichoběžníková metoda integrace
    [xf0,yf0,zf0] = rosslerf(xn,yn,zn,a,b,c);
    xn0 = xn;
    yn0 = yn;
    zn0 = zn;
    xn = xn0+dt*xf0;
    yn = yn0+dt*yf0;
    zn = zn0+dt*zf0;
    [xfn,yfn,zfn]=rosslerf(xn,yn,zn,a,b,c);
    xn = xn0+dt2*(xfn+xf0);
    yn = yn0+dt2*(yfn+yf0);
    zn = zn0+dt2*(zfn+zf0);
    % Prvních 2000 bodů se nevykresluje, jde o přechodnou část
    % trajektorie, která je závislá na počátečních podmínkách
    if i > 2000
        x(i-2000) = xn;
        y(i-2000) = yn;
        z(i-2000) = zn;
    end;
end;
% Obrázek Rösslerova atraktoru
plot3(x,y,z,'r')
set(gca,'FontName','Times New Roman CE')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title(sprintf('Rösslerův atraktor. Parametr c = %1.2f',c))

function [xf,yf,zf] = rosslerf(x,y,z,a,b,c)
% Vrací hodnoty proměnných Rösslerova systému
xf = -y-z;
yf = x+a*y;
zf = b+x*z-c*z;
```