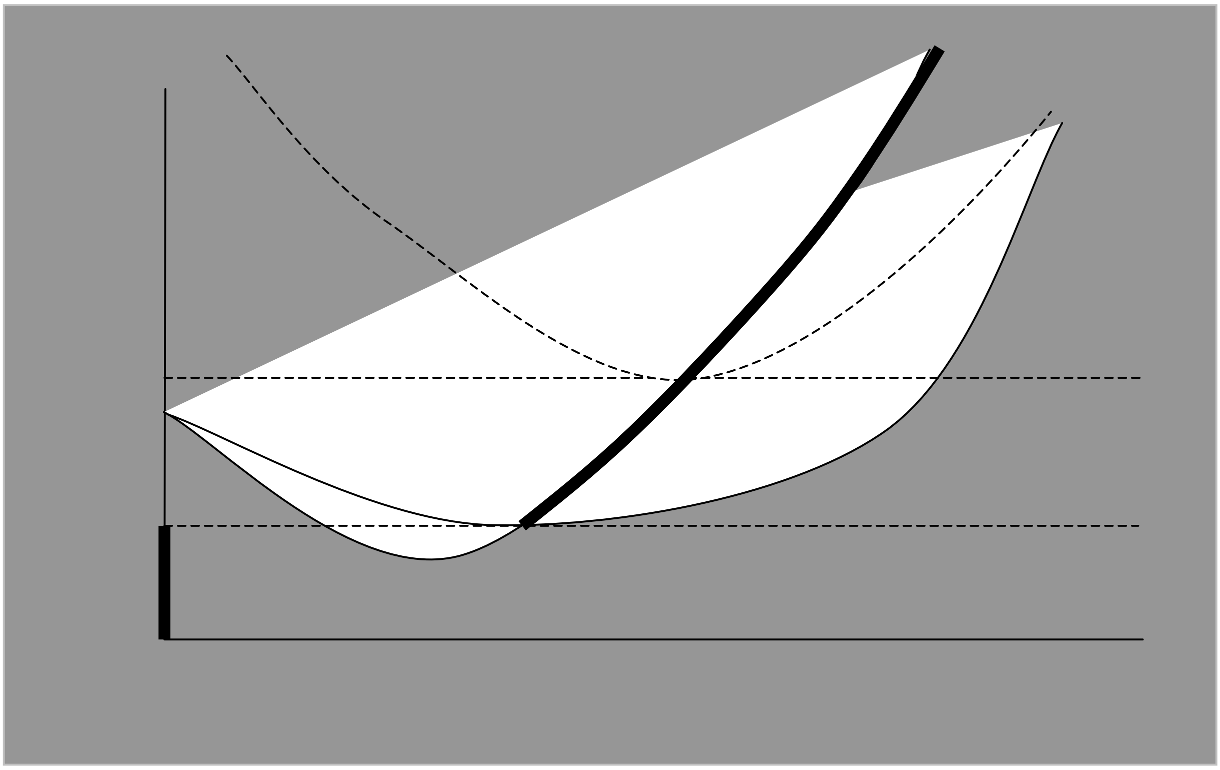
Working paper
UK FSV - IES

No. 23

Hlaváček, Jiří; Hlaváček, Michal: Petrohradský paradox



prosinec 2002

1. Úvod[1]

Danieli Bernoullimu[2] (1700 - 1782) se přičítá autorství modelu maximalizace očekávané hodnoty výhry[3] při modelování ekonomického rozhodování s rizikem[4]. Jak ukázaly četné experimenty, tento přístup plně neodpovídá ekonomickému chování subjektů[5]. Předpoklad, že kritériem racionálního subjektu v situaci nejistoty je maximalizace očekávaného zisku, lze snadno napadnout i jinak než na základě empirické zkušenosti. Jedním z nejefektnějších způsobů zpochybnění modelu maximalizace očekávané hodnoty výhry je tzv. petrohradský paradox, kdy pro každého hráče je výhodná strategie, která mu přináší prospěch jen v naprosto zanedbatelném procentu případů a prakticky v každém případě vede ke značné ztrátě.

Jedná se o následující hypotetickou hru : Hráč si kupuje např. za milion korun vstupenku do herny (petrohradského kasina), kde se hraje jediná hra : hází se mincí tak dlouho, dokud nepadne „hlava". Označme tento počet hodů symbolem **n**. Hráč pak dostává částku $\mathbf{2^n}$ korun, tedy dvě koruny má-li hráč smůlu hned v prvním hodu, čtyři koruny padne-li „hlava" napodruhé atd. Očekávaná hodnota výhry v petrohradském kasinu roste nade všechny meze : $\mathbf{v = (1/2)\,.\,2 + (1/4)\,.\,2^2 + ... + (1/2^n).2^n + ... = 1+1+ ... +1+ ....}$

Výhra převýší milionovou cenu vstupenky až když „orel" padne 20 krát za sebou. Koupě jakkoli drahé vstupenky (třeba i za milion korun) by měla být (z pohledu očekávané výhry[6]) výhodná, nicméně nikdo rozumný si nekoupí vstupenku do této hypotetické herny za víc než dvojcifernou (a většina ani za víc než jednocifernou) částku v korunách. Intuitivně pociťovaná maximální akceptovatelná cena se pohybuje (v závislosti na bohatství subjektu) v rozmezí 2-40 Kč[7].

Modelová „výhodnost" jakkoli vysoké ceny vstupenky pro hráče maximalizujícího očekávanou výhru je důsledkem astronomické výše výhry v prakticky pominutelných případech. Žádný reálný rozhodovatel se v tomto případě

---

[1] *Tento článek vznikl za podpory grantu GAČR č. 402/01/0034, poskytnutého FSV UK a UTIA AV.*

[2] *Jedná se o synovce slavnějšího Jakuba Bernoulliho (1654-1705), mj. autora Bernoulliho zákona velkých čísel.*

[3] *Viz Bernoulli D. (1738).*

[4] *D.Bernoulli sám tvrdil, že tento model byl znám dávno před ním. Viz Lea S.E.G. , Tarpy R.M., s. 183.*

[5] *Viz např. Mosteller F., Nogee P. (1951), s. 371-404, Tversky A., Kahneman D., (1974), s. 1124-1131 nebo Kahneman, D., Tverski, A. (1986), s. 251–278.*

[6] *K formulaci petrohradského paradoxu viz např. Schroeder, M. (2000), s. 148.*

očekávanou hodnotou zisku neřídí: ochota akceptovat i astronomickou výši vstupného by evidentně znamenala ztrátu pudu sebezáchovy a tím i (ekonomické) životaschopnosti subjektu.

Pohled "z opačné strany" je stejně přesvědčivý : při rozhodování na základě očekávané hodnoty zisku je nevýhodné provozování petrohradského kasina dokonce ani za jakoukoli zápornou cenu (tedy provozování kasina s tím, že provozovatel vlastníkovi nic neplatí, ale naopak od něj dostává navíc ke vstupnému denní dotaci milion (deset milionů, miliardu ...) korun. Přitom reálně neexistuje (ani v oblasti organizovaného zločinu) žádná podnikatelská příležitost, která by se jen vzdáleně této nabídce blížila (a každý ekonomicky racionální subjekt "by to bral" i při podstatně nižším garantovaném příjmu).

Otázky, které si v tomto příspěvku klademe, jsou : existuje konečná *ekonomicky racionální* úroveň ceny této hry pro ekonomický subjekt? A kde se toto optimum nalézá? A jaký model resp. jakou kardinální užitkovou funkci máme zvolit pro užitek z peněz, máme-li se popsanému rozporu vyhnout a modelově ho vyřešit?

Petrohradský paradox nelze uspokojivě vysvětlit pomocí modelů typu „mean-variance utility“[8], kde se jakožto kardinální užitková funkce maximalizuje vážený průměr střední hodnoty a rozptylu. Pro libovolnou nenulovou váhu střední hodnoty i zde (z reálného pohledu nesmyslně) vychází, že akceptovatelná je libovolně vysoká cena vstupného do petrohradského kasina.

Jedním z možných přístupů k vysvětlení petrohradského paradoxu je Von-Neumannova-Morgensternova teorie maximalizace očekávaného užitku z výhry[9]. Tento model pracuje s kardinálním užitkem z peněz, přičemž použitá užitková funkce je u subjektu, který je averzní k riziku, ryze konkávní. Může jít například o mocninnou funkci $\mathbf{u(x) = x^a}$.

Jiný přístup nabízí psychologie, konkrétně Weberův-Fechnerův zákon[10] o tom, že reálný subjekt se rozhoduje nikoliv podle intenzity podnětu , ale podle změny v intenzitě podnětu. Tomu odpovídá logaritmická kardinální užitková funkce $\mathbf{u(x) = \alpha . \log x}$, pro kterou má očekávaný užitek hodnotu úměrnou parametru α:

---

[7] *Viz Maňas M. (1969), s. 121*
[8] *Viz např. Meyer , J. (1987), s. 420-430*
[9] *Viz Von Neumann J., Morgenstern O. (1953)*
[10] *Viz např Frank R.H. (1995), s. 297*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha \cdot 2^{-i} \cdot \log\left(2^{i}\right) = \alpha \cdot \log 2$$

V obou těchto případech (užitek ve tvaru mocninné resp. logaritmické funkce) platí, že sice existuje vhodná (tj. poskytující "rozumnou" cenu vstupenky do petrohradského kasina) velikost parametru[11], nicméně nemáme žádné přímé ekonomické vodítko (ekonomicky zdůvodnitelný přímý argument) pro stanovení tohoto parametru a jeho „vhodné“ *ad hoc* nastavení pro petrohradský paradox by neodpovídalo jiným rozhodovacím situacím.

Společným problémem zmíněných přístupů je skutečnost, že rozhodování nezávisí na počátečním důchodu subjektu. Přitom právě výše bohatství (počátečního důchodu) evidentně ovlivňuje rozhodování subjektů v rizikových situacích : může jít jak o „lehčí ruku“ bohatšího hráče, tak o vynucené riskování tonoucího chudáka, který se chytá stébla (možné, byť nepravděpodobné výhry).

Alternativní přístup k modelu očekávaného užitku z výhry je použití subjektivních pravděpodobností, odlišujících se od objektivních hodnot. Ukazuje se, že lidé obvykle *přeceňují* pravděpodobnost výjimečných událostí[12], což zvyšuje cenu losu *nad* očekávanou hodnotu a přivádí každý týden miliony potencionálních milionářů do sběren Sportky, kde si za 12 korun kupují očekávanou výhru 6 korun. K vysvětlení petrohradského paradoxu bychom ovšem potřebovali přesně opačnou tendenci, tedy podcenění (resp. ignorování) extrémně nepravděpodobných (byť astronomických) výher. Tak uvažuje "reálný" návštěvník petrohradského kasina, který porovnává extrémně vysoké vstupné s očekávanou výhrou v (subjektivně pociťovaných) reálně očekávatelných případech. Tím vlastně "odřezává" část očekávané výhry. Toto rozdělení očekávané výhry na dvě části ilustrujeme v kapitole 4 formulací leningradského kasina, ve kterém jsou zrušeny reálně pravděpodobné výhry a zůstávají pouze výhry extrémně nepravděpodobné. Subjekt maximalizující očekávanou hodnotu zisku je i v leningradském kasinu ochoten zakoupit vstupenku za jakkoli vysoké vstupné.

---

[11] *U mocninné užitkové funkce $u(x) = x^a$ maximální akceptovatelná cena vstupenky ležela v "rozumném" rozmezí 2 - 40 Kč pro parametr $a = 0{,}93 \pm 0{,}04$, a to nezávisle na výši počátečního důchodu. Podobně lze "nastavit" parametr u logaritmické užitkové funkce.*

[12] *Viz Preston M. G., Baratta P.(1948), s. 183-193.*

V tomto příspěvku se pokusíme navázat na Von-Neumannův-Morgensternův přístup s tím, že se pokusíme najít ekonomicky zdůvodnitelnou kardinální ryze konkávní užitkovou funkcí, založenou na myšlence maximalizace pravděpodobnosti ekonomického přežití. Později (v odstavci 4) ukážeme, že pro subjekt s touto funkcí užitku je vstup do leningradského kasina neatraktivní při jakkoli nízké kladné ceně vstupného.

2. *Kritérium maximalizace pravděpodobnosti přežití pro důchod jakožto deterministickou veličinu*

Standardní mikroekonomie předpokládá, že subjekt (homo oeconomicus) maximalizuje svůj důchod. Nechceme jít cestou alternativy k této standardní kriteriální funkci rozhodovatele, nýbrž pracujeme s jejím zobecněním[13].

Jako kardinální kriterium subjektů - rozhodovatelů používáme maximalizaci pravděpodobnosti jejich přežití. Předpokládejme, že přežití (existenční ohrožení) subjektu závisí výhradně na jeho důchodu **d**. Pokud je jediným ohrožením subjektu jeho nízký důchod , splývá naše obecné kriterium se standardní maximalizací důchodu.

Předpokládejme dále, že pravděpodobnost přežití subjektu je úměrná podílu jeho rezervy (oproti hranici zóny zániku **b**) na jeho důchodu **d**:

$$\mathbf{p(x) = (d - b) / d} \qquad \text{pro} \qquad \mathbf{d \geq b}$$
$$\mathbf{p(x) = 0} \qquad \text{pro} \qquad \mathbf{d < b}$$

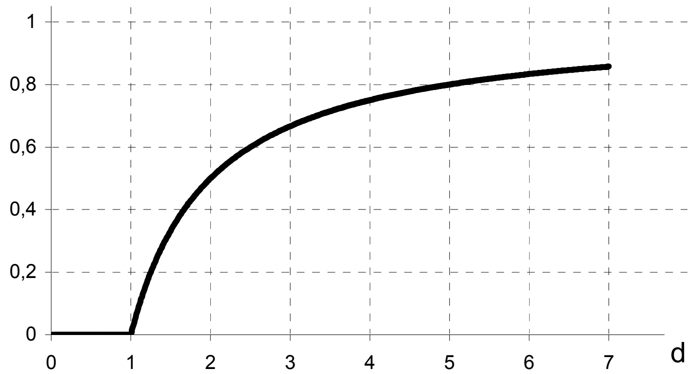
Tomu odpovídá nesymetrická distribuční funkce:

$$\mathbf{F(d) = (d-b)/d} \qquad \text{pro} \qquad \mathbf{d \geq b}$$
$$\mathbf{F(d) = 0} \qquad \text{pro} \qquad \mathbf{d < b}$$

a funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$\mathbf{f(d) = b/d^2} \qquad \text{pro} \qquad \mathbf{d \geq b}$$
$$\mathbf{f(d) = 0} \qquad \text{pro} \qquad \mathbf{d < b}$$

[13] *Viz Hlaváček J. (1999), s. 8-17.*



Obr. 1 : Rozdělení pravděpodobnosti ekonomického přežití podle relativní rezervy: Paretovo rozdělení prvního stupně s hranicí zóny jistého zániku b=1

Jedná se o Paretovo rozdělení prvního stupně [14]. Paretovo rozdělení vykazuje nulovou pravděpodobnost pro důchod na nebo pod hranicí **b** a pravděpodobnost konvergující k jedné při zvyšování důchodu nad všechny meze. Na rozdíl od Paretova rozdělení vyšších stupňů[15] nemá Paretovo rozdělení 1. stupně konečný průměr ani rozptyl, medián je **m=2b**.

V deterministické rovině, tedy je-li důchod **d** deterministickou veličinou, platí, že je-li jediným ohrožením subjektu nízký důchod, splývá toto kriterium s maximalizací zisku. Jde tedy o zobecnění, pokrývající oblasti ekonomického rozhodování, které standardní ekonomie nepostihuje (například altruismus, sdílený užitek, ohrožení nízkým objemem výstupu[16]).

---

[14] *Paretovo rozdělení se používá například při zkoumání příjmů obyvatelstva. Obecné Paretovo rozdělení stupně a s hranicí b má distribuční funkci*

$F(x)=1-(b/x)^a$ *pro* $x \geq b$,

$F(x)=0$ *pro* $x<b$,

a funkcí hustoty pravděpodobnosti

$f(x)=(a/b).(b/x)^{a+1}$ *pro* $x \geq b$

$f(x)=0$ *pro* $x<b$.

[15] *S Paretovým rozdělením 2. stupně pracujeme v práci Hlaváček J., Hlaváček M. (2003)*

[16] *Viz např. Hlaváček J. (1999), s. 153-190.*

3. Pravděpodobnost přežití pro důchod jakožto náhodnou veličinu

Je-li důchod náhodnou veličinou, máme co do činění s dvěma pravděpodobnostními rozděleními. Jde jednak o rozdělení pravděpodobnosti důchodu, jednak o rozdělení pravděpodobnosti přežití subjektu. Maximalizací pravděpodobnosti přežití se zde dostáváme ke kritériu, které bere v úvahu averzi subjektu k riziku : důchod (chápaný jako náhodná veličina se střední hodnotou $\overline{\mathbf{d}}$ a s rozptylem σ) s vyšší střední hodnotou a vyšším rozptylem může být z hlediska pravděpodobnosti přežití méně výhodný než důchod s nižší střední hodnotou a s vyšším rozptylem.

Předpokládejme například existenční minimum **b = 100** peněžních jednotek a porovnejme důchod **d =500** s "losem", který s pravděpodobností **0,5** vyhrává **2000** (a s pravděpodobností **0,5** nevyhrává nic). I když je střední hodnota losu $\overline{\mathbf{d}}$ dvojnásobná, subjekt maximalizující pravděpodobnost přežití zvolí jistotu, protože střední hodnota pravděpodobnosti přežití pro případ, že celý důchod vymění za účast v uvedené loterii se sníží :

a) $\mathbf{d = 500 \Rightarrow p(d) = (d-b)/d = (500-100)/500 = 0{,}8}$

b) $\mathbf{d} \in \{\mathbf{0;2000}\}$ s padesátiprocentní pravděpodobností pro obě alternativy $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{p(d) = 0{,}5 \,.\, (2000-100)/2000 = 0{,}475 < 0{,}8}$

Subjekt maximalizující pravděpodobnost přežití je tedy averzní k riziku. Budeme zkoumat, za jakou cenu je ochoten vstoupit do petrohradského kasina. Nejprve ovšem budeme analyzovat jeho ochotu vstoupit do méně atraktivního kasina, které má ovšem rovněž nekonečnou střední hodnotu výhry.

4. Formulace problému leningradského kasina

Nejprve mírně upravíme pravidla. Budeme hovořit o leningradském kasinu. Tam hráč nedostává nic, pokud nepadne alespoň **31** krát za sebou „hlava“. Jinak jsou pravidla stejná jako v petrohradském kasinu. I takto znevýhodněná hra má nekonečnou očekávanou výhru $\mathbf{2^{-31}.\ (1+1+ \dots +1+ \dots)}$, tedy pro subjekt maximalizující očekávanou hodnotu důchodu by měla být atraktivní za jakkoli vysoké vstupné.

Označme **v** výši výhry, **y** cenu vstupenky do leningradského kasina. Předpokládejme nejprve, že $\mathbf{y \leq d\text{-}b}$, tedy že hráč může vsadit jen tolik, kolik má nad své existenční minimum.

Pokud hráč nevyhraje, sníží se nákupem vstupenky do leningradského kasina jeho pravděpodobnost přežití o **(d-b)/d - (d-b-y)/(d-y)**. Tento pokles pravděpodobnosti přežití subjektu v alternativě bez výhry poměřuje racionální rozhodovatel s pravděpodobností výhry $\mathbf{2^{-31}}$, která by znamenala (v důsledku jej astronomické výše) zaručené přežití. Ptáme se, jaká je maximální cena vstupného do kasina **Y**, kterou je subjekt ochoten zaplatit. Pro subjekt maximalizující pravděpodobnost přežití musí platit:

$$\mathbf{2^{-30} \geq (d - b) / d - (d - b - Y) / (d - Y).}$$

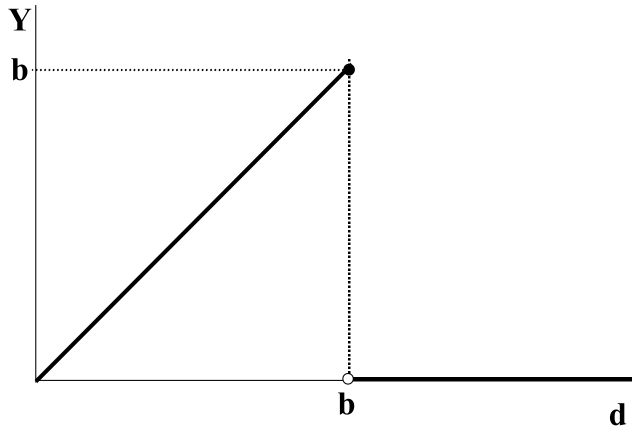
Označme **k = d/b** podíl důchodu a existenčního minima, tedy **k** je mírou bohatství subjektu. Jednoduchou úpravou dostaneme :

$$\mathbf{Y \leq b.\, k^2 / (k + 2^{31})}$$

Nejprve určíme tuto cenu pro subjekty s důchodem mezi existenčním minimem a jeho dvojnásobkem $\mathbf{1<k<2}$. Pro tyto chudé (řekněme, že **k=2** je hranice chudoby) je maximální akceptovatelná cena menší než $\mathbf{4b.2^{-31}}$, tedy v řádu zlomků promile z existenčního minima (tedy například méně než 1 haléř při existenčním minimu 10 000 Kč). Do leningradského kasina tedy standardní chudí nechodí.

Jaká je řádově cena pro extrémního boháče (řekněme s důchodem na úrovni stonásobku životního minima, tj. **k=100**) ? Ani pro něj nejde o žádnou astronomickou cifru, maximální přijatelná cena nepřesáhne stotisícinu existenčního minima (10 haléřů při existenčním minimu 10 000 Kč). Do modelového leningradského kasina nenajdou cestu ani modeloví boháči.

Přesto teoreticky můžeme uvažovat o subjektech, pro které je vstup do leningradského kasina atraktivní. Pokud totiž opustíme předpoklad $\mathbf{y \leq d\text{-}b}$, bereme v úvahu zoufalce, který se upíná pouze na možnost výhry, neboť jeho důchod nepřevyšuje úroveň existenčního minima: $\mathbf{d \leq b}$, tj. $\mathbf{k \leq 1}$. Pro něj je riziko jedinou šancí k přežití. Proto je ochoten zaplatit celý svůj důchod **d** (nevyhraje-li, tak jako tak nepřežije). Závislost maximálně akceptovatelné ceny hry na důchodu subjektu je tedy následující :



Obr. 2: Maximálně akceptovatelná cena vstupenky do leningradského kasina Y v závislosti na výši důchodu subjektu d (b je existenční minimum)

Do modelového leningradského kasina tedy přijdou jen ztroskotanci s důchodem $\mathbf{d} \in \mathbf{(y, b\rangle}$. Pokud se cena vstupenky zvýší nad úroveň existenčního minima , tj. pokud $\mathbf{y > b}$, nepřijde nikdo[17].

Pokud tedy pomineme možnost vstupu zoufalců se zcela zanedbatelnou pravděpodobností ekonomického přežití, lze říci, že leningradské kasino není atraktivní za žádnou nenulovou cenu.

5. Model petrohradského paradoxu.

Nyní se vrátíme k původnímu problému. Hráči, kteří by byli ovlivněni vysokou výhrou v případech 31 ti a více násobného padnutí orla, by navštívili i leningradské kasino. V minulém odstavci jsme racionálního návštěvníka leningradského kasina prakticky vyloučili. Zbývají tedy pouze ti, které přilákají "normální" výhry v ostatních (méně nereálných) případech. Očekávaná výše takové výhry je.

$$\mathbf{v = (1/2)\ .\ 2 + (1/4)\ .\ 4 + ... + (1/2^{30}).2^{30} = 30}$$

Subjektivně pociťovaná pravděpodobnost přežití subjektu s důchodem rovným **k**-násobku existenčního minima **b** po vstupu do petrohradského kasina se vstupným **Y** není ovlivněna pramálo pravděpodobnými astronomickými výhrami pro 31 a

[17] *Mohli bychom uvažovat i o subjektu s důchodem $d=b+\delta$, kde δ je tak malé, že pravděpodobnost přežití δ /b je menší než pravděpodobnost výhry2^{-31}. Tento případ však můžeme vyloučit vzhledem k tomu, že pro minimální dále nedělitelnou peněžní jednotku (řekněme pro m=1 haléř) vždy platí $m/b > 2^{-31}$.*

vícenásobné padnutí orla, neboť 30 ti násobný úspěch s výhrou $\mathbf{2^{30}}$ zajišťuje přežití s pravděpodobností nejméně 99,999 %.

V případě, že "hlava" padla právě v prvních **i** pokusech, má subjekt důchod rovný $\mathbf{d - Y + 2^i = k.b - Y + 2^i}$. Jeho pravděpodobnost přežití pro tento případ je

$$\frac{\mathbf{d - b - Y + 2^i}}{\mathbf{d - Y + 2^i}} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{k \cdot b - Y + 2^i}}$$

Očekávaná pravděpodobnost přežití hráče pro případ, že "hlava" padne nejvýš třicetkrát za sebou je tedy:

$$\sum_{i=1}^{30} \mathbf{2^{-i} \cdot \left[1 - b/\left(k \cdot b - Y + 2^i\right)\right]}$$

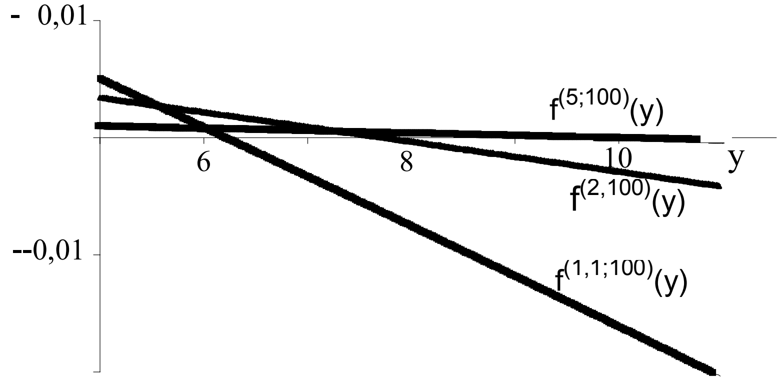
Maximální akceptovatelná cena je taková cena, pro kterou se tento výraz rovná **(d-b)/d = (k-1)/k = 1-1/k**, tedy pravděpodobnosti přežití pro případ, že subjekt do kasina nepůjde:

$$\mathbf{1/k - 1 + \sum_{i=1}^{30} 2^{-i} \cdot \left[1 - b/\left(k \cdot b - Y + 2^i\right)\right] = 0} \qquad (*)$$

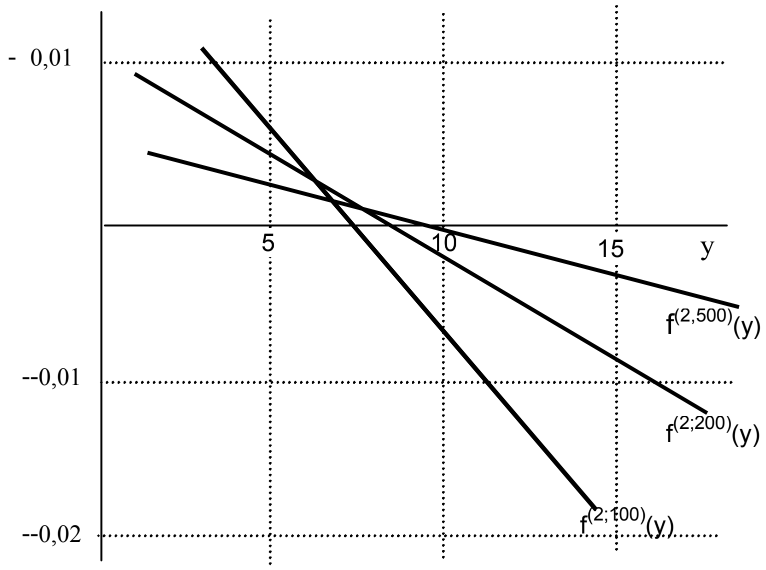
Označme levou stranu této rovnice jako :

$$\mathbf{f^{k,b}(Y) = 1/k - 1 + \sum_{i=1}^{30} 2^{-i} \cdot \left[1 - b/\left(k \cdot b - Y + 2^i\right)\right]}$$

Jak je vidět z následujících obrázků 3 ,4, má rovnice (*) v "rozumné" (tj. ekonomicky interpretovatelné) části definičního oboru právě jedno řešení:



Obr. 3 : Průběh funkce $f^{(k;100)}(Y)$ pro k ∈{1,1; 2 ; 5}. Pro k≥10 graf v použitém měřítku prakticky splývá s osou x.



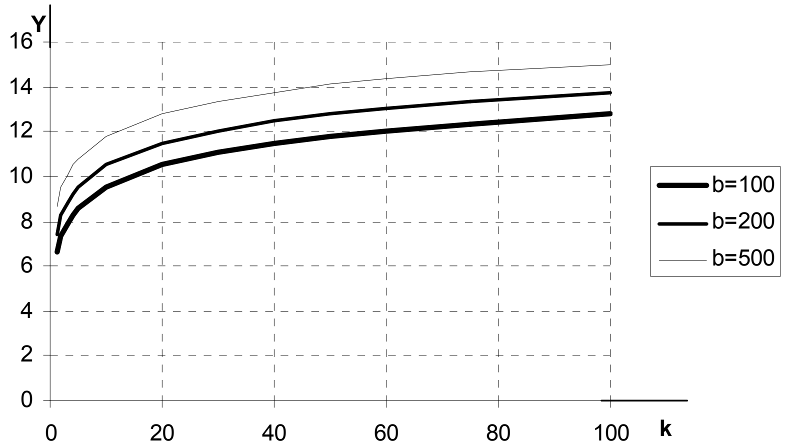
Obr. 4 : Průběh funkcí $f^{2;b}(Y)$ pro b ∈{100; 200 ; 500}.

Řešení rovnice (*) pro různé hodnoty parametrů **k, b** ukazují následující tabulka a obrázek.

k	b=100	b=200	b=500
1,1	6,6	7,45	8,7
2	7,35	8,25	9,5
3	7,9	8,8	10,1
4	8,25	9,2	10,5
5	8,55	9,5	10,8
10	9,5	10,5	11,8
20	10,5	11,45	12,8
30	11,05	12,05	13,35
40	11,45	12,45	13,75
50	11,8	12,8	14,1
60	12,05	13,05	14,35
75	12,35	13,35	14,65
100	12,8	13,75	14,95

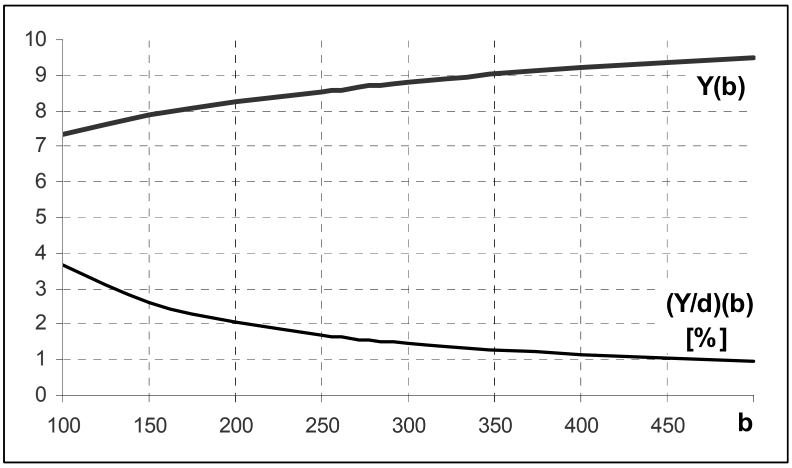
Tab. 2 : Maximální akceptovatelná cena vstupného do petrohradského kasina pro subjekty s různým ekonomickým postavením k v závislosti na ekonomickém postavení subjektu (parametru k) a na hranici zóny zániku b.

Grafy na následujícím obrázku představují velikost maximální akceptovatelné ceny **Y** v závislosti na ekonomickém postavení subjektu (na parametru **k**, představujícímu podíl důchodu a existenčního minima), pro tři různé velikosti hranice zóny zániku **b** $\in \{$**100; 200; 500**$\}$. Ve všech případech jde o rostoucí konkávní funkci. Subjekt reaguje pozitivně (vyšší poptávkou) na zlepšení svého ekonomického postavení, nicméně tempo nárůstu maximální akceptovatelné ceny s nárůstem parametru **k** se zpomaluje.



Obr. 5: Maximálně akceptovatelná nominální cena vstupenky do petrohradského kasina Y v závislosti na ekonomickém postavení subjektu (parametru k), přičemž b je hranice zóny zániku

I souvislost maximálně akceptovatelné ceny a velikostí parametru b je vyjádřená rostoucí konkávní funkcí. Tato souvislost může být na první pohled překvapivá : násrůst parametru **b** znamená ceteris paribus zhoršení ekonomické situace subjektu, neboť tím stoupá pravděpodobnost jeho ekonomického zániku. Je však třeba si uvědomit, že míra ohrožení je dána velikostí relativní rezervy **k=d/b** a že přechod na vyšší úroveň parametru **b** při nezměněném **k** znamená nejen zvýšení existenčního minima, ale za prvé nárůst důchodu o stejné % a za druhé inflační znehodnocení reálné ceny výhry i vstupného. V případě b = 100, d = 2.b = 200 základní (tj. minimální) výhra ve výši 2 představuje 1 % důchodu a cena vstupného 10 je 5 % důchodu subjektu, kdežto v případě b = 500, d = 2.b = 1000 představuje základní výhra 0,2 % důchodu a cena vstupného ve stejné nominální výši 10 je 1% důchodu subjektu . Větší podíl na důchodu znamená větší ohrožení, takže inflace vede logicky k tomu, že subjekt při zesílení ohrožení (dané nárůstem parametru **b)** akceptuje vyšší nominální, ale nižší reálnou cenu vstupného. Tuto závislost zachycuje následující obrázek 6 :



Obr. 6: Závislost poptávky po vstupu petrohradského kasina na hranici zóny zániku pro subjekt s k=2 (důchod roven dvojnásobku existenčního minima): maximálně akceptovatelná nominální cena vstupenky Y a reálná cena vstupenky Y/d maximálně akceptovatelná v závislosti na existenčním minimu b

Další tabulka ukazuje, jak náš subjekt minimalizující míru ohrožení zánikem reaguje na "zkrácení" hry stanovením maximálního počtu prováděných hodů (tento počet značíme **N**). Z výsledků propočtů je vidět, že nejchudší (**k=1,1**) vůbec neberou v potaz extrémně ziskové možnosti s pravděpodobností 2^{-12} , tedy 0,02 %, kdežto nejbohatší subjekty (k≥50) reagují citlivěji již na jevy s pravděpodobností $\mathbf{2^{-20}}$, tedy 0,0001 %. To koresponduje s realitou : chudí se spíše zapojují do levných her s relativně nízkou výhrou, naproti tomu pro bohaté je atraktivní hra vysokou cenou i výhrou, přičemž horní limit hry je od hry odradí (viz políčka v pravé dolní části následující tabulky, kdy řešená rovnice nemá ekonomicky interpretovatelné řešení).

k	N=30	N=25	N=20	N=15	N=12	N=10
1,1	6,60	6,60	6,60	6,60	6,55	6,45
2	7,35	7,35	7,35	7,35	7,25	6,95
5	8,55	8,55	8,55	8,50	7,95	6,20
10	9,50	9,50	9,50	9,20	7,10	-
50	11,80	11,80	11,55	-	-	-
100	12,80	12,80	11,80	-	-	-

Tab. 3 : Maximální akceptovatelná cena pro subjekty s různým ekonomickým postavením k pro maximálně N uvažovaných příznivých výsledků (padne "hlava") bezprostředně po sobě (případ b=100)

Subjekt maximalizující pravděpodobnost ekonomického přežití tudíž realisticky akceptuje vstupné do petrohradského kasina (bez limitu počtu hodů) v závislosti na svém ekonomickém postavení v rozmezí od 6,60 Kč do 12,80 Kč. Tabulka ukazuje na skutečnost, že je lhostejné, zda subjekt bere v potaz možnost výhry pouze pro případy, kdy při házení mincí padne „hlava“ 25 krát a méně nebo i případy, kdy počet bezprostředně následujících padnutí "orla je větší než 25, protože astronomické výhry nejen mají extrémně nízkou pravděpodobnost, ale pro šťastný subjekt s výhrou 2^{25} Kč již další případná výhra pravděpodobnost přežití (velmi blízkou jedné) neovlivňuje. Pro chudé subjekty totéž platí už pro výhry spojené s úvodní sérií 15 a více úspěšných pokusů (hodů mincí).

Běžný subjekt na úrovni dvojnásobku existenčního minima je ochoten zaplatit za naději na výhru zhruba 3,7 % důchodu, naproti tomu subjekt s výborným ekonomickým postavením na úrovni desetinásobku existenčního minima je ochoten zaplatit pouze 1,0 % důchodu.

Jinak je tomu s totálně ohroženými subjekty, jejichž pravděpodobnost přežití v případě, že do kasina nevstoupí, je nulová. jedná se o subjekty s podílem důchodu na existenčním minimu $\mathbf{k \leq 1}$. Stejně jako v leningradském kasinu je optimální strategie těchto o subjektů výjimečná . Vstup do kasina totiž dává i subjektu s $\mathbf{d - Y = 0}$ (který má jen na vstupné a jinak nic) nenulovou pravděpodobnost ekonomického přežití (pro $\mathbf{b = 100}$ jde o pravděpodobnost $\mathbf{1 : 2^7}$, tedy necelé jedno procento). U nich jde o situační sklon (zápornou averzi) k riziku, kdy subjekt (byť třeba i averzní k riziku) je svou situací k riskování donucen[18].

A jak se mění zájem o vstup do kasina ceteris paribus s výší nominální výhry? Předpokládejme, že výhra je ve výši $\mathbf{v.2^i}$, kde i je počet úspěšných hodů (i krát za sebou padl „hlava“), tedy **2.v** je nejnižší výhra (pro případ, že padne napoprvé „hlava“ a napodruhé "panna"). Řešíme rovnici :

$$\mathbf{1/k - 1 + \sum_{i=1}^{30} 2^{-i} \cdot \left[1 - b/\left(k \cdot b - Y + v.2^i\right)\right] = 0}$$

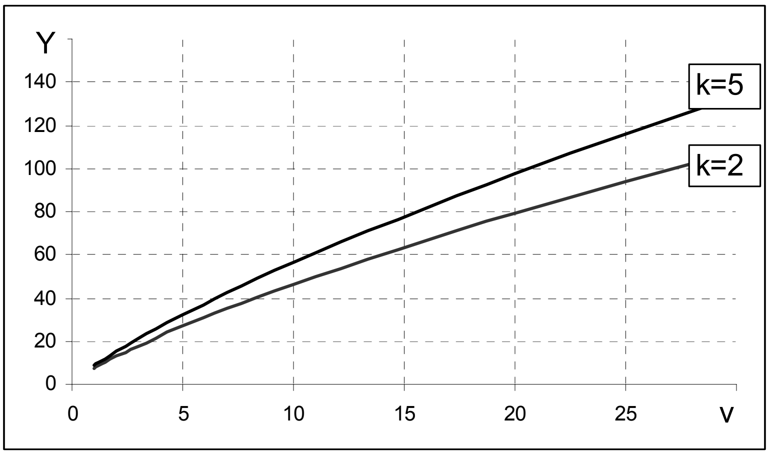
[18] *Jedná se o subjekty podobné tomu pánovi ze známé anekdoty, který jsa bez peněz se ptá v luxusní restauraci po své lukulské hostině, zda může platit perlami. Po souhlasné odpovědi vrchního číšníka žádá : "Tak mi přineste ještě dvě ústřice a držte nám palec".V jiných herních situacích může samozřejmě dojít k situačnímu sklonu k riziku i v méně absurdních případech. Viz Hlaváček J. a kol. (1999), s. 106-108.*

Řešení této rovnice pro různé hodnoty parametru **v** (výše základní výhry) opět shrnujeme v tabulce :

v	k=2	k=5
1	7,35	8,55
1,1	7,97	9,31
1,2	8,56	10,01
1,5	10,27	12,07
2	12,97	15,33
3	17,98	21,40
5	26,98	32,44
7	35,16	42,54
10	46,43	56,54
15	63,54	77,89
20	79,25	97,55
30	108,15	133,70

Tab. 3 : Vliv znásobení výher na maximální akceptovatelnou cenu (pro k=2 a k=5, b=100)

Obrázek 5 ukazuje, že se obou případech jedná se o závislost rostoucí a konkávní :



Obr. 5 : Závislost maximální akceptovatelné ceny na výši výher

Provozovatel petrohradského kasina tedy může stimulovat zájemce maximalizující pravděpodobnost přežití navýšením výher, nicméně mezní vliv tohoto navýšení klesá : navýšení výher na třicetinásobek navýší akceptovatelnou cenu vstupného jen zhruba na patnáctinásobek

6. Relativní rezerva oproti existenčnímu minimu : ekonomicky dobře interpretovatelná kardinální užitková funkce

S ordinální užitkovou funkcí vystačíme v deterministických modelech. V situaci nejistoty (což je případ petrohradského kasina) je ovšem nutné nějakou kardinální užitkovou funkci zvolit.

Naše kardinální užitková funkce je opřená o rozumně ekonomicky interpretovatelný ekonomický předpoklad (snaha omezit riziko ekonomického zániku). Na rozdíl od ostatních užívaných funkcí nevyžaduje stanovení svých parametrů *ad hoc*. Přednost vidíme v tom, že modelové rozhodování na základě této užitkové funkce není stejné pro bohaté a chudé subjekty. Navíc se opírá o osvědčené Paretovo rozdělení pravděpodobnosti, byť jde o rozdělení s nekonečnou očekávanou hodnotou i rozptylem, což je ekonomicky obtížně "stravitelné". Tuto okolnost chceme v budoucnu vyřešit aplikací Paretova rozdělení druhého stupně, které má konečnou očekávanou hodnotu i rozptyl a dobrou ekonomickou interpretaci (nárůst relativní rezervy oproti existenčnímu minimu), která odpovídá poznatkům ekonomické psychologie.

Literatura

Bernoulli D. : *Specimen theoriae novae de mensura sortis*, původně publikováno 1738, anglický překlad Economica 22, s. 23 – 36, 1954

Frank R.H., *Mikroekonomie a chování*, Svoboda, Praha 1995

Hlaváček J. aj. *: Mikroekonomie sounáležitosti se společenstvím*, Karolinum, Praha 1999

Hlaváček J., *Zobecněné mikroekonomické kriterium v tržní ekonomice,* Politická ekonomie 2000, č. 4 , s.515-529.

Hlaváček J., Hlaváček M., *Ekonomická iracionalita donátora plynoucí z nedůvěry k příjemci dotace*, Finance a úvěr 2003 (v tisku)

Lea S.E.G. , Tarpy R.M., Webley P., *Psychologie ekonomického chování*, Grada, Praha 1994

Kahneman, D., Tverski, A.: *Rational Choice and the Framing of Decisions*, Journal of Business 59, 1986 s. 251–278.

Maňas M.: *Teorie her a optimální rozhodování* , Státní pedagogické nakladatelství Praha 1969

Meyer , J.: *Two-moment decision models and expected utility maximization*, American Economic Review, 1987, 77(3), s. 420-430

Mosteller F., Nogee P., *An Experimental Measurement of Utility*, Journal of Political Economy 59, 1951

Preston M. G., Baratta P., *An experimental study of the auction-value of a uncertain outcome.* American Journal of Psychology 61, 1948, s. 183-193.

Schroeder, M.: Fractals, Chaos, Power Laws, W.H.Freeman and Comp.,2000, s. 148

Tversky A., Kahneman D.: Judgement under uncertainty, : Heuristics and biases. Science 185, 1974, s. 1124-1131

Von Neumann J., Morgenstern O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1953.

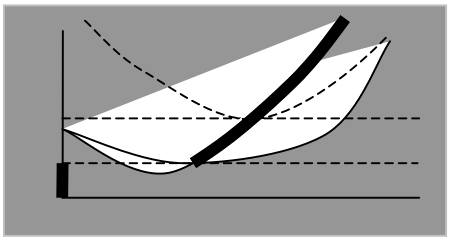
Dosud vyšlo :

1. *Michal Hlaváček : Modely difuze technologií*
2. *Tomáš Cahlík : Analýza ekonomického výzkumu*
3. *Vladimír Benáček: : Autentický soukromý sektor v transitivní ekonomice: příspěvek ke hledání kořenů a alternativ českého kapitalismu*
4. *Milan Sojka : Alternativní scénáře transformační strategie československé ekonomiky na počátku 90. let a jejich teoretická východiska*
5. *Jiří Hlaváček, Michal Hlaváček : Optimum výrobce v odvětví s nikdy neklesajícími výnosy z rozsahu*
6. *František Turnovec : The Czech Republic on its Way to the European Union*
7. *Lubomír Mlčoch : Ekonomie důvěry*
8. *Luděk Urban : Zásady společné obchodní politiky a důsledky jejich přijetí pro českou ekonomiku*
9. *Jan Ámos Víšek : Export z ČR do EU a mimo EU*
10. *Miloslav S. Vošvrda : On Martingale Diffusions in Financial Markets*
11. *František Turnovec :Flexible Integration and the Excessive Deficit Procedure in the EMU*
12. *Jiří Hlaváček, Michal Hlaváček : Byl proces eliminace podniků ozdravnou procedurou pro české hospodářství konce 90. let?*
13. *Karel Půlpán: Hospodářský vývoj Španělska jako inspirace pro Českou republiku.*
14. *Jiří Hlaváček, Michal Hlaváček : Ekonomicky racionální altruismus*
15. *Jiří Kameníček : Nástroje pro popis nestandardního ekonomického chování, aplikace teorie lidského kapitálu*
16. *Jiří Hlaváček : Redistribuce : projev lidských preferencí a společenských potřeb*
17. *Silvester van Koten: Transaction Cost Economics: Basic Concepts and Extensions*
18. *Hlaváček J., Hlaváček M.: Ekonomická racionalita donátora a důvěra k příjemci dotace*
19. *Benáček V., Víšek J.Á.: Determining Factors of Competitiveness of Trade and Specialization of Czech Industrial Sector before the EU Accession*

20. *Milan Sojka, Postkeynesovská teorie peněz, peněžní a úvěrová politika a postavení centrální banky*
21. *Milan Sojka, Alternativní scénáře transformační strategie československé ekonomiky na počátku 90. let a jejich teoretická východiska*
22. *František Turnovec, Economic Research and Education in the Czech Republic 1989-2000*

Univerzita Karlova v Praze, Fakulta sociálních věd,
Institut ekonomických studií [UK FSV – IES] Praha 1, Opletalova 26.

E-mail : IES@Mbox.FSV.CUNI.CZ http : //IES.FSV.cuni.cz



Dosud vyšlo :

1. *Michal Hlaváček : Modely difuze technologií*
2. *Tomáš Cahlík : Analýza ekonomického výzkumu*
3. *Vladimír Benáček: : Autentický soukromý sektor v transitivní ekonomice: příspěvek ke hledání kořenů a alternativ českého kapitalismu*
4. *Milan Sojka : Alternativní scénáře transformační strategie československé ekonomiky na počátku 90. let a jejich teoretická východiska*
5. *Jiří Hlaváček, Michal Hlaváček : Optimum výrobce v odvětví s nikdy neklesajícími výnosy z rozsahu*
6. *František Turnovec : The Czech Republic on its Way to the European Union*
7. *Lubomír Mlčoch : Ekonomie důvěry*
8. *Luděk Urban : Zásady společné obchodní politiky a důsledky jejich přijetí pro českou ekonomiku*
9. *Jan Ámos Víšek : Export z ČR do EU a mimo EU*
10. *Miloslav S. Vošvrda : On Martingale Diffusions in Financial Markets*
11. *František Turnovec :Flexible Integration and the Excessive Deficit Procedure in the EMU*
12. *Jiří Hlaváček, Michal Hlaváček : Byl proces eliminace podniků ozdravnou procedurou pro české hospodářství konce 90. let?*
13. *Karel Půlpán: Hospodářský vývoj Španělska jako inspirace pro Českou republiku.*
14. *Jiří Hlaváček, Michal Hlaváček : Ekonomicky racionální altruismus*
15. *Jiří Kameníček : Nástroje pro popis nestandardního ekonomického chování, aplikace teorie lidského kapitálu*
16. *Jiří Hlaváček : Redistribuce : projev lidských preferencí a společenských potřeb*
17. *Silvester van Koten: Transaction Cost Economics: Basic Concepts and Extensions*
18. *Hlaváček J., Hlaváček M.: Ekonomická racionalita donátora a důvěra k příjemci dotace*
19. *Vladimír Benáček , Víšek Jan Ámos: Determining Factors of Competitiveness of Trade and Specialization of Czech Industrial Sector before the EU Accession*
20. *Milan Sojka, Postkeynesovská teorie peněz, peněžní a úvěrová politika a postavení centrální banky*
21. *Milan Sojka, Alternativní scénáře transformační strategie československé ekonomiky na počátku 90. let a jejich teoretická východiska*
22. *František Turnovec, Economic Research and Education in the Czech Republic 1989-2000*

Univerzita Karlova v Praze, Fakulta sociálních věd,
Institut ekonomických studií [UK FSV – IES] Praha 1, Opletalova 26.

E-mail : ies@mbox.fsv.cuni.cz *http://ies.fsv.cuni.cz*