Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd

Institut ekonomických studií

Diplomová práce

2007 **Ladislav Nevrkla**

Univerzita Karlova v Praze

Fakulta sociálních věd

Institut ekonomických studií

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Úrokové deriváty v nabídce českých bank

typy, použití a některé metody ohodnocení

Vypracoval: Ladislav Nevrkla

Vedoucí: doc. Ing. Oldřich Dědek, CSc.

Akademický rok: 2006/2007

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil pouze uvedené prameny a literaturu.

V Praze dne 15. ledna 2007 Ladislav Nevrkla

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu práce doc. Ing. Oldřichu Dědkovi, CSc. za vedení, podporu a trpělivost při tvorbě diplomové práce. Dále bych rád poděkoval pracovníkům oslovených bank za poskytnuté informace.

Abstrakt

Tato práce se zabývá úrokovými deriváty v kontextu českých bank. Úrokový derivát je zde definován jako finanční nástroj, jehož podkladovým aktivem je úrokový nástroj, který je denominován pouze v jedné měně a výplata z úrokového derivátu je závislá na budoucí úrokové míře.

V první části je analyzován bankovní sektor a jsou popsány produkty zjištěné od bank. Šíře nabídky slouží jako indikátor rozvinutosti trhu. Druhá část analyzuje oceňovací modely a snaží se odpovědět na otázku, zda banky oceňují derivátové produkty pravou hodnotou. Je popsána konstrukce výnosové křivky, Blackův-Scholesův model a detailně Hullův-Whiteův model. Celkovou strukturou se práce snaží detailně popsat problematiku úrokových derivátů.

This thesis describes interest rate derivatives in context of Czech banks. The interest rate derivative is defined for the purpose of this thesis as a financial instrument where the interest rate instrument is its underlying asset, which is denominated in a single currency and its payoff is dependent on future interest rate development.

First part deals with an analysis of the bank sector and the identified products are described. Range of the offered products serves as an indicator of the interest rate derivative market development. Second part analyzes pricing models and tries to answer a question whether the banks price the derivatives products at fair value. The yield curve construction is described and Black - Scholes and Hull - White models follow. The whole structure of this thesis aims to cover the detailed description of the interest rate derivatives.

Obsah

Teze diplomové práce

Předpokládaný název práce

Úrokové deriváty v nabídce českých bank (typy, použití a některé metody ohodnocení)

Charakteristika tématu

Cílem této diplomové práce bude popsat úrokové deriváty (interest rate derivatives) s ohledem na ČR. Úrokovým derivátem je myšlen finanční nástroj (futurita, opce nebo swap), jehož podkladovým aktivem je úrokový nástroj, který je denominován pouze v jedné měně a výplata z úrokového derivátu je závislá na budoucí úrokové míře.

Tato práce se zaměří na situaci v ČR. Bude zkoumat, jak je trh s deriváty v ČR rozvinutý, jaká je praxe sjednávání obchodů? Jaké konkrétní produkty je možné koupit? Jaká jsou jejich specifika? Protože trh s deriváty se u nás odehrává hlavně na OTC trzích v bankovním sektoru a ne na burze, bude pozornost zaměřena na realitu velkých bankovních domů. Informují banky dostatečně koncové uživatele o svých produktech? Pokud se podaří získat testovací data, tak budou analyzovány ceny nabízené bankami.

Vzhledem k možným ztrátám z derivátových obchodů platí, že obchodník, který je sjednává, by jim měl velmi dobře rozumět a měl by být schopen je sám ohodnotit. Je to však možné? Pokud se předpokládá, že k orientačnímu ocenění se použije nějaký základní jednoduchý model, je relevantní vzhledem ke skutečným cenám? Dá složitější model lepší výsledky? (tj. vyplatí se investovat do nějakého oceňovacího softwaru?) Jak moc se budou lišit ocenění od skutečných cen? (otázka marže tvůrců derivátového produktu) Budou podrobně popsány hlavně typy získané z nabídek bank, jejich použití v praxi a některé metody ohodnocení a pro účely ocenění budou tyto metody implementovány v MS Excel (s pomocí Visual Basic for Applications).

Osnova

- Charakteristika trhů s deriváty,

- Úrokové deriváty nabízené bankami v ČR,
- Jejich charaktetristika a použití v praxi,
- Provedení srovnávacích ocenění.

Základní literatura

JÍLEK, J. *Finanční a komoditní deriváty v praxi.* Grada Publishing, 2005.

JÍLEK, J. *Finanční a komoditní deriváty.* Grada Publishing, 2002.

RITCHKEN, P. *Derivative markets: theory, strategy, and applications.* Harper Collins College Publishers, 1996.

CLEWLOW, L., STRICKLAND, C. *Implementing Derivatives Models.* Wiley, 1998.

HULL, J. C. *Options, Futures, And Other Derivatives.* Prentice Hall, 2003.

WILMOTT, P. *Derivatives: The Theory and Practice of Financial Engineering.* Wiley, 1998.

1 Úvod

Finanční deriváty jsou nástroje, jejichž mohutný rozvoj nastal v druhé polovině 20. století a stále se jedná o velice dynamicky se rozvíjející a ekonomicky důležitou oblast. Ne jinak je tomu v České republice, kde, díky historickým důvodům (přechod k tržní ekonomice) a díky malé velikosti zdejšího kapitálového trhu, trh s deriváty doháněl úroveň rozvinutých ekonomik. Zprávy z denního tisku o (někdy problematických) derivátových operacích různých ekonomických subjektů nás mohou přesvědčit o tom, že je to oblast důležitá. Pro uživatele derivátů (a z tohoto úhlu je na deriváty v této práci nahlíženo) určitě platí, že by jim měli dobře rozumět a studovat je.

Hlavním cílem této práce je detailně popsat úrokové deriváty s ohledem na nabídku a praxi českých bank (zkoumané na určitém vzorku). První část práce se proto věnuje na základě nabídky bank charakteristice obchodovaných úrokových derivátů. Stav této nabídky bude sloužit k ověření hypotézy ohledně rozvinutosti trhu s deriváty, šíře nabídky bude vypovídat o tom, jak je daný trh rozvinutý.

Druhá část se věnuje oceňování derivátů. Trh vymezený tématem této práce je mimoburzovní. To sebou nese výhodu, že je možné specifikovat každý kontrakt podle požadavků obou partnerů obchodu, což je ale vyváženo menší transparentností a tím případnou snadnější manipulací s cenou. Proto je v druhé části také zkoumána hypotéza o regulérním ocenění produktů nabízených bankami.

Při popisu oceňovacích modelů budou zohledněny údaje zjištěné od bank. Bude provedeno ocenění základních druhů derivátů (příp. některých jejich modifikací) nacházejících se v nabídce všech zkoumaných bank. Podrobně bude popsán Hullův-Whiteův model a jeho numerická implementace pomocí trinomického stromu (byl vybrán proto, že je používaný v praxi).

1.1 Základní definice

Derivát je finanční kontrakt, jehož výnosy jsou odvozené z chování nějakého aktiva (např. dluhopis, akcie), úrokové míry, měnového kurzu nebo indexu, obecně podkladového nástroje (pro potřeby účetnictví (např. v US GAAP) je definice mnohem podrobnější)[1]. Na trhu existuje mnoho různých derivátových kontraktů a můžeme je dělit podle různých hledisek. Jedním z možných dělení je podle způsobu, jakým se obchodují na:

- Burzovní, což jsou deriváty, které se obchodují na burze, která funguje jako zprostředkovatel všech transakcí. Největší derivátové burzy jsou (podle počtu transakcí) Korea Exchange, Eurex, Chicago Mercantile Exchange a Chicago Board of Trade.
- Mimoburzovní nebo také OTC (Over-the-counter), což jsou deriváty obchodované přímo mezi dvěma stranami bez zprostředkovatele.

Dále můžeme deriváty dělit podle typu kontraktů na (DĚDEK(2004)):

- Forwardy - dohoda mezi dvěma stranami, která dnes fixuje podmínky směny, jež proběhne k budoucímu datu. Obsahem kontraktu je předmět směny (podkladové aktivum), cena, termín a místo dodání aj.
- Futurity - standardizovaný termínový kontrakt (jeho vymezení není předmětem opakované negociace) obchodovaný hromadně na termínových burzách.
- Swapy - kontrakt, kdy si dvě strany vyměňují určité finanční toky - např. úrokové platby (jedna z plateb podle pevné úrokové míry, druhá podle pohyblivé) odvozené ze stejné pomyslné jistiny.
- Opce - kontrakt, jejímž zakoupením držitel opce získává právo, nikoli povinnost, koupit nebo prodat určité podkladové aktivum za pevně stanovenou uplatňovací cenu buď kdykoli do doby dospělosti opce (americká opce) nebo v okamžiku splatnosti opce (evropská opce).

Dále deriváty můžeme dělit podle typu podkladového aktiva na úrokové deriváty (interest rate derivatives), měnové deriváty (currency derivatives), akciové deriváty (equity derivatives), komoditní deriváty (comodity derivatives) a úvěrové deriváty (credit derivatives).

[1] Je dobré podotknout, že deriváty jsou právně i ekonomicky součástí hazardních her, jsou nástroji s nulovým součtem zisků a ztrát, neboť součet zisků a ztrát obou partnerů je nulový. Má-li jeden subjekt z derivátu zisk, potom partner má z daného derivátu ztrátu a naopak(JÍLEK(2002)).

Pro potřeby této práce je úrokový derivát detailněji definován jako finanční nástroj, jehož podkladovým aktivem je úrokový nástroj, který je denominován pouze v jedné měně a výplata z úrokového derivátu je závislá na budoucí úrokové míře. Úrokové deriváty tvoří největší derivátový trh na světě. Podle ISDA (International Swaps and Derivatives Association) 80% z 500 největších společností na světě (duben 2003) používá úrokové deriváty. Jak uvidíme později, i na českém trhu tvoří největší část.

Další možné dělení derivátů je podle účelu sjednání (JÍLEK(2002)):

- Deriváty tvorby trhu - existuje zde osoba (dealer), která obchoduje svým jménem na vlastní účet, je partnerem obchodu (ne pouze zprostředkovatelem-makléřem). Tyto deriváty přispívají k likviditě trhu a důvodem sjednávání derivátů tvorby trhu je u tvůrců trhu (market-makers)[2] zisk z poplatků a z rozpětí mezi poptávkou a nabídkou. Tvorbu trhu mohou provádět pouze licencované osoby.
- Deriváty zajišťovací - deriváty tvůrců trhu a konečných uživatelů - zajišťovatelů).[3]
- Deriváty spekulační - deriváty tvůrců trhu a konečných uživatelů - spekulantů).[4]

[2]Podle definice je tvůrce trhu povinen na požádání kdykoliv kotovat nákupní a prodejní kurz. Tato přísná definice však platí jen pro účastníky burz. Pro mimoburzovní tvůrce trhu to nemusí být povinnost.

[3]Pokud mají být deriváty označené k datu uzavření kontraktu vedeny jako zajišťovací (je zde i daňové zvýhodnění), tak musí být při zaúčtování derivátu splněny následující podmínky (Vyhláška č. 500/2002 Sb.(2006)):

a) na počátku zajištění je zajišťovací vztah zdokumentován,

b) zajištění je efektivní,

c) efektivita je spolehlivě měřitelná a průběžně posuzovaná.

Dokumentace je účetním záznamem a obsahuje identifikaci zajišťovaných položek a zajišťovacích derivátů, přesné vymezení rizika, které je předmětem zajištění, způsob výpočtu efektivnosti. Zajištění je efektivní, pokud na počátku a v průběhu zajišťovacího vztahu je poměr mezi změnami reálné hodnoty nebo peněžních toků zajišťovaných položek z titulu zajišťovaného rizika a změnami reálné hodnoty nebo peněžních toků zajišťovacího derivátu odpovídající zajišťovanému riziku v intervalu 80% - 125%. Účetní jednotka zjišťuje, zda zajištění je efektivní na počátku zajištění a dále nejméně k okamžiku sestavení účetní závěrky.

[4]Spekulační derivát je derivát, který není derivátem tvorby trhu ani zajišťovacím derivátem. Derivá-

2 Situace v České republice

V ČR byla spuštěna 5.října 2006 derivátová burza (přestože povolení organizovat veřejný trh s vybranými deriváty (opce a futurity) udělila Komise pro cenné papíry Burze cenných papírů Praha už v srpnu roku 2001). Prvním produktem, který pražská burza svým investorům prostřednictvím derivátového trhu nabízí, je futurita na hlavní index PX.[5] V době neexistence této nové burzy se veškerý obchod s deriváty prováděl na OTC trhu, případně přes makléře na zahraničních burzách.[6] Burza je však teprve v počátcích, takže OTC trh je pořád významný.

Podle VLK(2004) je český derivátový trh koncentrován zejména na český bankovní sektor,[7] o kterém lze získat údaje poskytované Českou národní bankou. K celkovému přehledu za ČR by bylo potřeba ještě zjistit OTC deriváty sjednávané českými subjekty mezi sebou a deriváty sjednávané českými nebankovními subjekty v zahraničí. Protože bankovní sektor je velmi významný z pohledu derivátů a do jisté míry i určující, tato práce je dále zaměřena právě na deriváty v českém bankovním sektoru z pohledu jejích uživatelů, s důrazem na nabídku bank.

tový spekulant je účastník trhu, který vstupuje na derivátový trh ve snaze dosáhnout zisku s tím, že akceptuje riziko (JÍLEK(2002)).

[5]Hlavní index pražské burzy PX vznikl 20. března 2006 splynutím indexů PX 50 a PX-D. Jako jeden z hlavních důvodů pro tento krok bylo právě získání vhodného podkladového aktiva na obchodování s futuritami.

[6]Už dříve ale bylo možné obchodovat deriváty na český akciový index např. na Vídeňské burze.

[7]Bankovní sektor celosvětově tvoří značnou část derivátového trhu. Souvisí to s vývojem v bankovnictví v posledních letech, kdy docházelo k postupnému poklesu ziskovosti bank a banky se snažily svoje ztráty nějak kompenzovat - velmi aktivně se pustily do obchodů s deriváty.

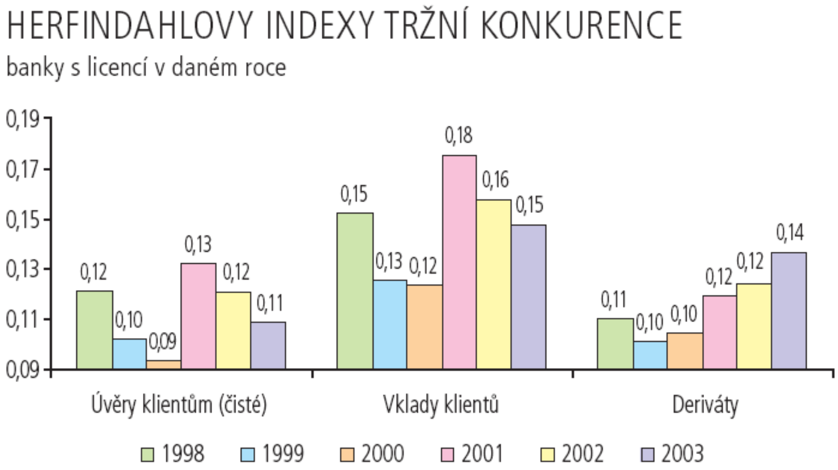
Deriváty obecně nemohou být v rozvaze, protože rozvaha vypovídá o minulém a současném stavu účetní jednotky. K zachycení nástrojů, které budou mít v budoucnosti vliv na rozvahu jednotky a postupně se stanou rozvahovými skutečnostmi (např. uskutečněná swapová platba), slouží tzv. podrozvaha (off-balance), ve které jsou prvotně zachyceny nominální hodnoty finančních derivátů. Pořizovací cena (která zahrnuje náklady na pořízení) a následné přecenění na reálnou hodnotu se pak vykazuje v rozvaze. Reálné hodnoty jsou podle charakteru jednotlivých finančních derivátů získávány z kótovaných tržních cen, z modelů diskontovaných peněžních toků nebo z modelů oceňování opcí. Deriváty s kladnou reálnou hodnotou jsou vykázány jako aktiva a deriváty se zápornou reálnou hodnotou jako pasiva (ČSOB(2004)).

2.1 Bankovní sektor

Podle ČNB(2004)[8] pokračuje trend navyšování derivátových operací. V roce 2004 pohledávky z derivátových operací vzrostly na 3 969,7 mld. Kč, závazky z derivátových operací pak na 3 940,1 mld. Kč. Růst derivátových operací se promítl do převýšení celkové bilanční sumy bankovního sektoru hodnotou derivátových operací o 50% - pokud se podíváme na český bankovní sektor, vidíme, že v dlouhodobém trendu objem podrozvahových transakcí (z nichž derivátové operace tvoří většinu) značně převyšuje rozvahové. Pro rok 2004 (viz ČNB(2004)) je to 4 514 489 mil. Kč pro podrozvahové a 2 635 554 mil. Kč pro rozvahové[9].Z použitých podkladových nástrojů výrazně převažují úrokové nástroje. Na konci roku 2004 dosáhl jejich podíl již 73,5%. Absolutně nejvyšší podíl ze všech derivátových operací vykazují s 52,7% podílem swapové operace. Pokud se podíváme na partnery kontraktů, tak v roce 2004 se v případě derivátů pohyboval podíl operací s nerezidenty na jejich celkovém objemu mírně pod 70%.

[8]V době psaní této části (leden 2006) ještě nebyl k dispozici Bankovní dohled pro rok 2005, nicméně situace v roce 2005 je obdobná jako pro rok 2004.

[9]Banky celosvětově v posledních letech velmi zvýšily svoji pozici na derivátových trzích. Zvýšený podíl bank na derivátových obchodech přitáhl pozornost regulátorů, kteří se začali obávat, zda nemohou deriváty vnést nestabilitu na finanční trhy a trhy obecně. Obava je to sporná a zastánci derivátových obchodů tvrdí, že i dříve existovaly vysoce rizikové ztrátové operace. Jaké riziko tedy ve skutečnosti deriváty pro banku znamenají? Banky se nejvíce zaměřují na úrokové deriváty, z toho nejvíce na úrokové swapy. Globálně není možné přesně zjistit, o jaké produkty se přesně jedná, ale lze předpokládat, že se jedná o klasické („plain vanilla“) swapy, tj. swapy, kde dochází ke směňování úrokových toků z pevných sazeb oproti pohyblivým. Ovšem jmenovitá hodnota swapu, který banka drží, není dobrým měřítkem rizika. Narozdíl od úvěrových nástrojů, jako jsou dluhopisy nebo poskytnuté úvěry, u swapů nedochází k výměně jmenovitých hodnot, ale pouze jejich rozdílu. Takže kreditní riziko, kterému je banka ve skutečnosti vystavena, je pouze zlomkem hodnoty jmenovité hodnoty (narozdíl např. od úvěru). Uvádí se, že jde zhruba o 1% jmenovité hodnoty. S tímto kreditním rizikem se banky vypořádávají několika způsoby. Mohou omezovat expozici vůči jedné straně kontraktu, vyžadovat určitý rating u protistrany apod. V každém případě lze říci, že kreditní riziko spojené s deriváty není rozhodně tak velké jako třeba u půjček. Jiné je to ovšem s vystavením riziku dané změnami úrokových měr a kurzu, tedy s tržním rizikem. Ale ani toto riziko není pro banky ničím novým. Tomuto riziku už byly i dříve vystaveny držením cenných papírů s fixní úrokovou mírou a půjček, ovšem deriváty mohou velmi výrazně tuto expozici snížit nebo zvýšit a právě ono zvýšení je v centru zájmu regulátorů, kteří vyžadují obvyklou zásadu opatrnosti.

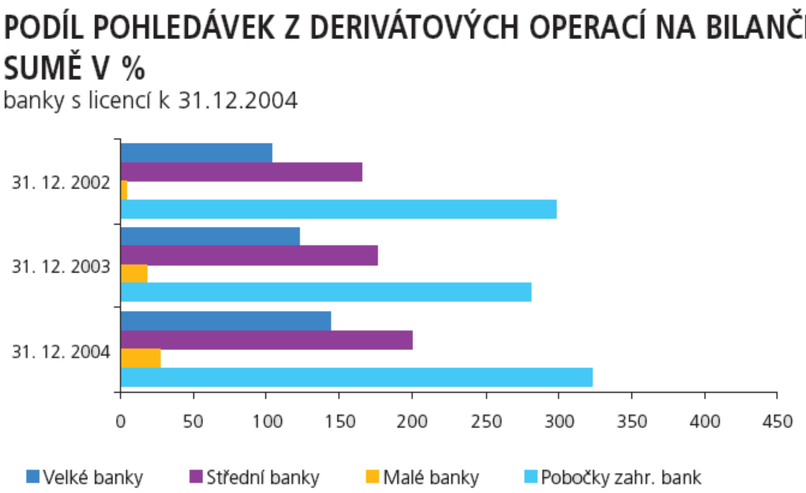


Obr. 1: Zdroj ČNB(2003)

Dalším aspektem, který může mít vliv na kvalitu derivátového trhu, je koncentrace trhu. Měří se Herfindahlovým indexem tržní konkurence a z obr. 1 vidíme, že na trhu derivátových obchodů se Herfindahlův index zvyšuje již pátým rokem, což signalizuje další rostoucí koncentraci převažujících objemů tohoto typu obchodů do menšího počtu bank.

V roce 2004 se trhu derivátů účastnilo 22 bank z celkového počtu 35 bankovních subjektů. Bankovní subjekty se dělí do několika skupin - velké banky, střední banky, malé banky, pobočky zahraničních bank a stavební spořitelny. Mezi jednotlivými skupinami i jednotlivými bankami jsou velké rozdíly, pokud jde o derivátové obchody. Co se týče angažovanosti, tj. podíl pohledávek z derivátových operací na bilanční sumě, tak jednoznačně nejlépe jsou v tomto směru trvale pobočky zahraničních bank (viz obr. 2).

Podíváme-li se ale na celkové pohledávky jednotlivých skupin bank (v roce 2004), tak největší podíl má skupina velkých bank (viz tab. 1). Protože pro další pokračování práce bylo potřeba oslovit určitý vzorek konkrétních bank, vyvstala zde otázka výběru tohoto vzorku. Pro jeho výběr bylo stanoveno kritérium, že daný vzorek musí v objemu derivátových operací tvořit většinu na českém trhu. Pak existuje jistota, že dané banky s deriváty obchodují aktivně a jejich nabídka derivátových produktů bude pravděpodobně nejširší. A právě skupina velkých bank splňuje kritérium, které bylo zvoleno.



Obr. 2: Zdroj ČNB(2004)

Skupina bank	**mil. Kč**
velké banky	2 264 119
střední banky	836 707
malé banky	17 040
pobočky zahraničních bank	851 809
stavební spořitelny	0

Tab. 1: Pohledávky z derivátových operací (k 31. 12. 2004)

2.2 Oslovené banky

Na skupině velkých bank:

- Česká spořitelna, a.s.,
- Československá obchodní banka, a.s.,
- HVB Bank Czech Republic a.s.,
- Komerční banka, a.s.,

jsem provedl v lednu 2006 dotazníkový průzkum. Otázky byly kladeny s důrazem na informovanost potenciálního klienta. Hlavním cílem bylo zjistit

1. Kompletní nabídku úrokových derivátů.
2. Existenci ceníku.
3. Funkci bank na trhu (tvůrci trhu, makléři).
4. Typ rámcové smlouvy.
5. Zda se klient dozví oceňovací model.

Ad 1) Z průzkumu vyplynulo, že na internetových stránkách není úplná nabídka (což se dalo očekávat), ale že tato nabídka nemůže být vlastně nikdy úplně kompletní, protože záleží na individuálních potřebách každého klienta. Ve všech případech mi byly zaslány produkty, které jsou „stavebními kameny“, z nichž se dále vhodnou kombinací tvoří případně i složitější strukturované produkty (strategie složené z oněch jednodušších produktů).

Ad 2) Druhou otázkou jsem sledoval možnost pohodlného rychlého srovnání cen stejných produktů mezi bankami, ovšem z průzkumu vyplynulo, že každý produkt je „šit na míru“, takže žádný ceník standardizovaných produktů neexistuje.

Ad 3) Tato otázka zjišťovala pozici banky na trhu a ukázalo se, že záleží na oddělení. V širší definici mají banky status tvůrce trhu (viz Základní definice). Klientská oddělení bank ale nejsou povinná na požádání kdykoliv kotovat nákupní a prodejní kurz (což je přísnější definice tvůrce trhu), zatímco oddělení pro obchodování na mezibankovním trhu tuto přísnější definici splňuje.

Ad 4) Touto otázkou jsem zjišťoval komfort uzavíráni kontraktu, protože je možné sjednat derivát zvláštní smlouvou k danému kontraktu nebo se spolehnout na nějakou standardizovanou smlouvu, kdy v současné době je nejdále v tomto směru dokumentace ISDA, která již pokrývá celý rozsah OTC derivátů (JÍLEK(2002)). OTC deriváty jsou obvykle založeny na dvou dokumentech, na rámcové smlouvě a na konfirmaci, která specifikuje podrobnosti každé jednotlivé transakce, která vychází z verbální smlouvy (možné i telefonicky). Rámcová smlouva není pro vlastní obchodování nutná, ale umožňuje sjednat obchody rychle a s minimálními dokumenty. V bankách se používá česká mutace rámcové smlouvy ISDA.

Ad 5) Cena derivátu je jistě důležitý faktor při rozhodování o sjednání kontraktu. A ocenění je samozřejmě také zavislé na použitém oceňovacím modelu, používané modely mohou být v různých bankách různé. Pro úplnou informovanost mě proto zajímalo, zda se jako klient dozvím použitý oceňovací model a případně jaký model to je. Odpovědi byly různě úplné, ale dohromady vytváří celkem zajímavý celek.

Ve všech bankách se klient na požádání oceňovací model dozví. Od jedné z bank mi bylo ale sděleno, že s dotazem od klienta ohledně použitého oceňovacího modelu se ještě nesetkali. Klienta většinou prý zajímá pouze výsledná cena, popř. její srovnání s cenou, kterou nabízí konkurence. Praxe oceňování je pak většinou taková, že např. úrokovou opci si ocení pomocí modelu, který poskytuje Reuters (v případě úrokových opcí je to Blackův-Scholesův model) a zároveň si nechají okotovat cenu od nějaké tržní protistrany, která aktivně vystupuje na trhu s tímto typem instrumentů. Dále jsem byl odkázán např. na stránky <http://www.superderivatives.com>, které mohou sloužit ke srovnávacímu ocenění. Pro úrokové opce evropského typu se ve všech bankách používá Blackův-Scholesův model.

Od další banky mi byly sděleny ohledně modelů tyto informace: Pro oceňování úrokových derivátů FRA a swapů se používá cubic spline model pro modelování výnosové křivky a následně metoda extrakce (bootstrapping) pro ocenění výsledného derivátu. Pro ocenění úrokových opcí se používá Blackův-Scholesův model, binomický model a nebo metoda monte carlo, přičemž tyto modely se dle potřeby kombinují.

V další bance se swapy (IRS (interest rate swap), CMS (constant maturity swap)) a FRA oceňují pomocí zero coupon křivky sestrojené z kotací depozitních sazeb do jednoho roku a kotací IRS výše. Ocenění spočívá v diskontování jednotlivých plateb. Evropské úrokové opce se oceňují pomocí Blackovy-Scholesovy rovnice použitím kotovaných volatilit. Americké a bermudské opce pomocí úrokového modelu HW (Hull-White), popř. BDT (Black-Derman-Toy), či BK (Black-Karasinski).

Další části práce se odvíjí od výsledků tohoto dotazníkového průzkumu. Následující kapitola podává přehled a charakteristiku úrokových derivátů, které byly získány z nabídky bank (kombinací informací získaných z jejich nabídky na internetu a z informací, které mi byly poskytnuty).

3 Produkty

V této části budou popsány zjištěné produkty nabízené bankami. U každého produktu (produktem je zde míněn úrokový derivát) bude napsáno, u které banky byl explicitně zjištěn a bude popsána jeho charakteristika, včetně základního využití - v případě úrokových derivátů se jedná hlavně o zajišťování. Následující výčet je ovšem nutné brát orientačně, protože, jak už bylo napsáno výše, každá banka tvrdí, že jejich nabídka není úplná, že se přizpůsobí individuálnímu klientovi.

Zde popisované produkty patří mezi nástroje OTC trhu. OTC trh je neformální. Oproti burze se liší v tom, že produkty jsou sice standardizovány, ale pouze rámcově, což umožňuje „šít“ jednotlivé produkty na míru (tailor made). To potvrdil i můj průzkum. Na rozdíl od burzy zde však není žádné zúčtovací středisko (clearing-house), takže každá strana OTC přebírá určité kreditní riziko. Díky informačním technologiím je i zde snaha zřizovat zúčtovací střediska, ale jejich většímu rozšíření na OTC trzích brání transakce šité na míru a existence mnoha různých nástrojů.

3.1 FRA

ČS a.s., ČSOB a.s., HVB Bank a.s., KB a.s.

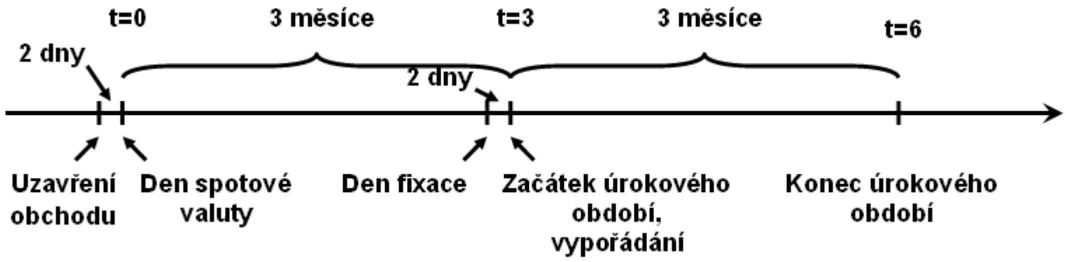
Forward rate agreement (FRA) je OTC nástroj konstruovaný na míru požadavkům klienta. Jedná se o mimobilanční obchod, jehož předmětem je dohoda o stanovení úrokové sazby (FRA sazby) na předem definovanou částku na konkrétní období v budoucnosti. Tento nástroj se používá k odstranění rizika plynoucího z pohybu úrokových sazeb vztahujících se k danému období (zpravidla jde o násobky 3, tj. 3, 6, 9 a 12 měsíců). Specifikem u FRA kontraktu je způsob, jakým dochází k vypořádání obchodu. Mezi účastníky totiž nedochází ke skutečnému fyzickému plnění předem dohodnuté částky za předem dohodnutou FRA sazbu, ale pouze k vzájemnému dorovnání úrokového rozdílu mezi FRA sazbou, která je předmětem obchodu, a skutečnou velikostí referenční sazby (např. PRIBOR, EURIBOR, LIBOR), a to obvykle dva pracovní dny před počátkem FRA období. FRA období obvykle nezačíná později než jeden rok po uzavření FRA kontraktu, stejně tak

FRA období běžně nebývá delší než jeden rok. Skutečnost, že nedochází k fyzické výměně podkladových jistin, je výhodou FRA a usnadňuje situaci pro případ, že nedojde k peněžním transakcím, kvůli kterým bylo FRA uzavřené (ČS(2005), ČSOB(2003)).

Parametry FRA kontraktu:

- částka (objem kontraktu) – počítá se z ní výše plnění,
- měna,
- určení stran obchodu (kdo je kupující a kdo prodávající),
- FRA období (datum počátku a konce)– úrokové období, ke kterému se FRA sazba vztahuje,
- Datum uzavření obchodu (trade date) - den sjednání FRA sazby,
- Datum spotové valuty (spot value date) - den, od kterého se počítá délka kontraktu (určení začátku a konce úrokového období a určí se tak, že ke dni spotové valuty přičteme celé měsíce (podle FRA období)),
- FRA sazba (pevná sazba),
- referenční sazba a den její fixace vztahující se k příslušnému FRA období (dva pracovní dny před počátkem FRA periody) – slouží pro porovnání s FRA sazbou a následný výpočet plnění v den splatnosti FRA (u CZK jde o PRIBOR, u EUR o EURIBOR a u USD o LIBOR),
- Datum vypořádání - shodný s počátkem FRA období.

Kupující FRA je plátcem pevné a příjemcem referenční sazby, prodávající FRA je příjemcem pevné a plátcem referenční sazby. Kupující FRA si zajišťuje úrokovou sazbu, za kterou si půjčí finanční prostředky na určité období v budoucnu a tím se zároveň zajistí proti možnému zvýšení úrokových sazeb. Prodávající FRA si zajišťuje úrokovou sazbu, za kterou si v budoucnu uloží finanční prostředky na určité období a zároveň se tak zajistí proti snížení úrokových sazeb (ČS(2005)). FRA sazba se váže k určitému konkrétnímu



Obr. 3: FRA 3x6, zpracováno podle JÍLEK(2002)

budoucímu období. Toto období je charakterizováno dvojicí čísel (např. 3 x 6, viz obr. 3). První číslo označuje počet měsíců, za který má dojít k poskytnutí dohodnuté částky (počátek FRA období), druhé číslo potom počet měsíců, za který má dojít ke splacení dohodnuté částky (konec FRA období). Jelikož vypořádání FRA, tj. kompenzační platba rozdílu mezi FRA sazbou a referenční sazbou, se uskutečňuje na začátku relevantního úrokového období, je nutno výši plnění diskontovat.

FRA kontrakt se kotuje v úrokové sazbě pomocí rozpětí nabídkové a poptávkové ceny (bid – offer spread). Toto rozpětí je závislé na objemu kontraktu, likviditě trhu v dané měně a FRA periodě.

3.2 Swapy

Obecně jsou úrokové swapy obchody, jejichž parametry lze přizpůsobit specifickým potřebám účastníků kontraktu. Existují různé varianty úrokového swapu (IRS - interest rate swap), které banky nabízí. V základní podobě se jedná o dvojstrannou dohodu, kdy jedna strana platí pohyblivou referenční sazbu, druhá pak pevnou fixní sazbu.

Klasický IRS (ČS a.s., ČSOB a.s., HVB Bank a.s., KB a.s.)

Základ tohoto nástroje tvoří dohoda mezi dvěma účastníky kontraktu o vzájemných budoucích úrokových platbách (dohoda o výši a časovém harmonogramu jednotlivých plateb) denominovaných v jedné a téže měně. Výše jednotlivých úhrad je pro každého z účastníků kontraktu definována jako úrok z předem stanovené jistiny swapu (která je pro obě strany stejná). Jedna strana platí úroky vypočtené podle pevné úrokové sazby (tj. sazby, která je dopředu stanovena na celou dobu swapu). Touto stranou je obvykle kupující

IRS (viz obr. 4), který se zajišťuje proti nárůstu úrokových sazeb. Druhá strana, obvykle prodávající, platí úroky vypočtené podle pohyblivé úrokové sazby (konkrétní výše této sazby není s výjimkou prvního úrokového období dopředu známa, pouze se určí referenční sazba, na jejímž základě bude vypočtena konkrétní výše úrokové sazby pro dané období, např. 6M PRIBOR) (ČSOB(2003)).

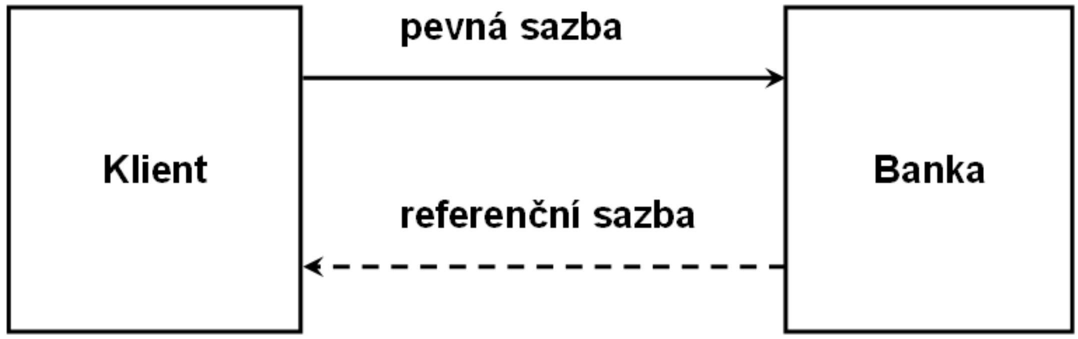
Parametry úrokového swapu:

- objem kontraktu,
- doba trvání swapu,
- výše a časový harmonogram plateb vypočtených podle fixní sazby,
- referenční sazba (float), od které se budou odvíjet platby vypočtené podle pohyblivé úrokové sazby (včetně načasování okamžiků její fixace a okamžiků plateb),
- datum uzavření obchodu.

Cena swapu je definována ve výši fixní sazby. Protože je pro obě strany kontraktu objem kontraktu stejný a kontrakt je denominován v téže měně, není nutné, aby docházelo k počáteční či závěrečné výměně jistin. Časování plateb daných referenční sazbou je určeno ve smlouvě při uzavření kontraktu a je dané charakterem referenční sazby. Datum fixace referenční sazby se nazývá „reset date“ a okamžik platby „settlement date“. Zafixování sazby, resp. výše plnění probíhá podobně jako u FRA dva pracovní dny před začátkem úrokového období. Vypořádání (settlement) se realizuje k poslednímu dni úrokového období, tj. nediskontuje se. Reálné úrokové platby se zpravidla nahrazují pouze dorovnáním rozdílu, což je tzv. netting (ČS(2005), ČSOB(2003), COOK(1993)).

Co se týče kotace IRS, je na OTC trzích zvykem (jako v případě FRA), že se kotují dvě ceny, nabídková a poptávková (bid - offer ceny). Čili není jedna cena s přirážkou, ale rozpětí, z kterého je případně generován zisk. Bid - offer spread je závislý na objemu kontraktu a likviditě trhu v dané měně.

Modifikace(ČS(2005), KB(2006), BAZ(2004))



Obr. 4: Klient je kupující stranou ve swapovém obchodě.

- **Amortizovaný IRS** (KB a.s., ČSOB a.s.) Nominální hodnota, z níž se počítají úroky, je v průběhu kontraktu snižována předem specifikovaným způsobem.

- **Step-up IRS** (KB a.s.) Nominální hodnota, ze které se počítají úroky, je v průběhu kontraktu zvyšována předem specifikovaným způsobem.

- **IRS fixing set-in-advance** (všechny banky) Součást klasického IRS. Referenční (plovoucí) sazba je fixována dva pracovní dny před začátkem úrokového období (reset date), s tím, že vypořádání (settlement) proběhne vždy na konci úrokového období.

- **IRS fixing set-in-arrears** (KB a.s.) Referenční (plovoucí) sazba je fixována dva pracovní dny před koncem úrokového období (reset date), s tím, že vypořádání (settlement) proběhne vždy na konci úrokového období.

- **IRS Capped** (ČS a.s.) IRS Capped je podobně jako IRS dvojstrannou dohodou o vzájemných budoucích úrokových platbách. Obě strany inkasují a poukazují platby opačného charakteru: proti platbě fixních úroků směřuje platba pohyblivých (float) úroků a naopak. Výše floatové sazby je však omezena - má definovanou maximální úroveň (další parametr kontraktu ke klasickému IRS). Výhodou oproti klasickému IRS je nižší úroveň fixní sazby. Nevýhodou je, že úroveň zajištění je limitovaná, proto se IRS Capped využívá při očekávání mírnějšího růstu úrokové sazby. Maximálně efektivní je při rychlém růstu referenční úrokové sazby v počátku zajišťovaného období a její následné stabilitě v úrovni dohodnutého limitu.

- **Quanto Swap** (ČS a.s., KB a.s.) Quanto swap je dvojstranná dohoda o vzájemných budoucích úrokových platbách. Obě strany inkasují a poukazují úrokové platby odvozené od odlišné úrokové báze. Platby jsou denominovány ve stejné měně. Quanto swap je např. swap, kde investor platí 6M dolarový LIBOR v dolarech a přijímá 6M EURIBOR také v dolarech. Jmenovitá hodnota je pro obě strany kontraktu stejná a v dolarech.

- **CMS (Constant Maturity Swap)** (KB a.s.) Pohyblivá referenční sazba je navázaná na swapovou sazbu (např. CZK SWAP 2Y, EUR SWAP 3Y, USD SWAP 5Y, atd.) s tím, že typ swapové sazby může zůstat po celou dobu shodný nebo se může měnit dle dohodnutého scénáře - např. tzv. **CMS-to-maturity**, kdy je délka swapové sazby v pravidelných intervalech měněna tak, aby odpovídala době zbývající do splatnosti obchodu.

3.3 Úrokové opce

Klasické opce (ČS a.s., ČSOB a.s., HVB Bank a.s., KB a.s.)

Klasická úroková opce (plain vanilla option) je kontrakt, pomocí níž si může kupující opce zajistit maximální nebo minimální úrokovou sazbu na libovolné budoucí období. Kupující opce získává z její definice právo (nikoli povinnost) tuto opci uplatnit. Výměnou za toto právo platí kupující opce prodávajícímu opční prémii. Pokud kupující opci uplatní, má prodávající povinnost vypořádat příslušný opční kontrakt podle předem dojednaných parametrů. Opce na tržní úrokové sazby se dělí na cap a floor (v závislosti na jejich využití)(ČS(2005), BAZ(2004)).

Parametry úrokové opce (typu cap, floor) jsou následující:

- druh opce,
- realizační úroková sazba (strike price),
- objem kontraktu,
- prémie (cena opce),

- datum uzavření obchodu,
- referenční sazba,
- data fixací a vypořádání v jednotlivých úrokových obdobích.

V den fixace referenční úrokové sazby (dva pracovní dny před počátkem úrokového období) se porovná výše realizační ceny s výší referenční sazby. K vypořádání (settlementu) dochází k poslednímu dni úrokového období.

Cap je úrokový derivát složený ze souboru evropských kupních opcí (nazývaných caplet), kdy kupující capu obdrží výplatu na konci každé periody, kdy úroková míra překročí dohodnutou hranici (strike price). Může jít např. o kontrakt, kdy kupující obdrží výplatu pro každé tříměsíční období, kdy PRIBOR překročí 2,5%. Kupující se tedy zajišťuje proti růstu úrokových sazeb.

Caplet je evropská kupní opce na referenční úrokovou míru L, např. již zmíněný tříměsíční PRIBOR, s uplatňovací cenou K (strike price) a jmenovitou hodnotou A. Cap o délce T má obvykle $(T-1)$ capletů. Caplet i $(i = 1, ..., T-1)$ má výplatu:

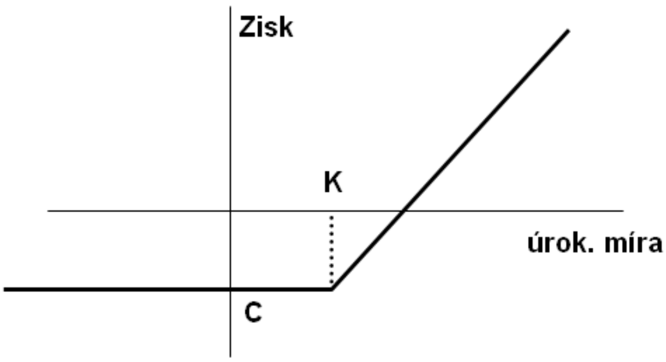
$$A \max(L_i - K, 0)\Delta t, \tag{1}$$

kde L_i je referenční sazba v čase $i\Delta t$ (Δt je délka dílčího časového úseku) a výplata se uskuteční v čase $(i+1)\Delta t$. Hodnota capu v čase nula je

$$V_{cap} = \sum_{i=1}^{T-1} V_i^C, \tag{2}$$

kde V_i^C je hodnota capletu i.

Floor je úrokový derivát složený ze souboru evropských prodejních opcí (nazývaných floorlet), kdy si kupující zajišťuje minimální úrokovou sazbu (realizační cena – strike). Jestliže se v den splatnosti opce nachází referenční úroková sazba pod realizační cenou



Obr. 5: Caplet

opce, bude opce uplatněna a kupující dostane od prodávajícího rozdíl mezi těmito dvěma sazbami. Kupující se tedy zajišťuje proti poklesu úrokových sazeb.

Floorlet je evropská prodejní opce na referenční úrokovou míru L. Zachováme-li značení pro cap a caplet, výplata pro floorlet je následující:

$$A \max(K - L_i, 0)\Delta t. \tag{3}$$

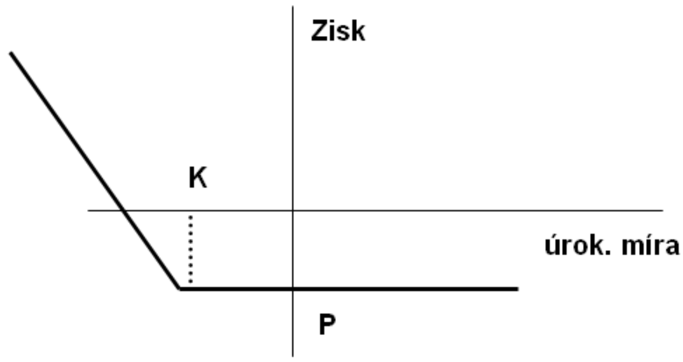
Podobně

$$V_{floor} = \sum_{i=1}^{T-1} V_i^F, \tag{4}$$

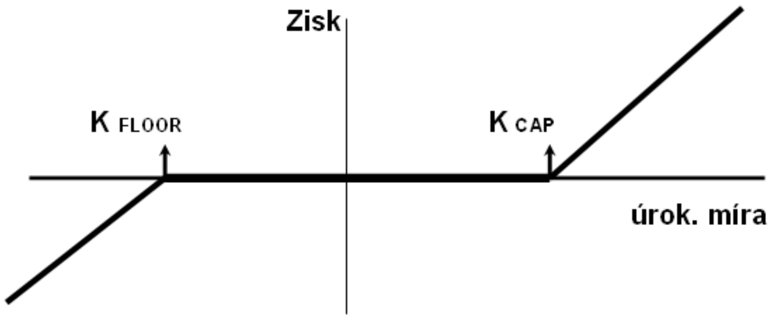
kde V_i^F je hodnota floorletu i.

Collar je zajišťovací nástroj, který stanovuje limity pohybů úrokové sazby - specifikuje maximální a minimální úrokovou sazbu. Může sloužit také ke snížení nákladů na prémii. V případě, že výsledná prémie je nulová, jedná se o tzv. zero-cost collar. Collar je současný nákup a prodej opce cap a floor stejných parametrů (objem kontraktu, splatnost, referenční sazba, vypořádání, ale různé realizační ceny).

- nakoupený collar = nakoupený cap + prodaný floor
- prodaný collar = prodaný cap + nakoupený floor



Obr. 6: Floorlet



Obr. 7: Zero-cost collar (nakoupený)

Při nákupu collaru si kupující při nižší, příp. nulové prémii, zajišťuje maximální úrokový náklad (při budoucím čerpání úvěru) a současně limituje případný zisk z poklesu referenční sazby (viz obr. 7). Prodejem collaru se může prodávající zajistit proti riziku poklesu sazeb na budoucí vklad stanovením minimální úrokové sazby. Výměnou za nižší (příp. nulovou) prémii je prodávající omezen v potenciálním zisku plynoucím z možného růstu sazeb stanovením maximální úrokové sazby (ČSOB(2003)).

Další typy opcí

Swapce (ČS a.s., ČSOB a.s., HVB Bank a.s., KB a.s.)

Swapce je specifickým druhem úrokové opce, která dává svému majiteli právo ve stanovené lhůtě uzavřít úrokový swap. Existují dvě možnosti: buď swapce dává právo swap prodat - prodejní swapce (receiver swaption) nebo koupit - kupní swapce (payer swaption). Smysl swapce tkví v tom, že umožňuje klientovi uzavřít v budoucnosti swap za dnes dohodnutou sazbu, i když není předem jisté, zda k transakci skutečně dojde (ČSOB(2003)).

Prodejní swapce je opce na swap, kdy kupující přijímá pevnou sazbu a platí pohyblivou (čili pozice je zisková, pokud dojde k poklesu sazeb) a naopak kupní swapce je opce na swap, kdy kupující přijímá pohyblivou (referenční) sazbu (např. šestiměsíčí PRIBOR) a platí pevnou (čili pozice je zisková, pokud dojde k růstu sazeb). Je možné si všimnout, že pokud se chce klient zajistit proti poklesu (růstu) sazeb, může volit mezi prodejní swapcí a floor opcí (kupní swapcí a cap opcí). Floor (cap) opce se obvykle používají pro kratší splatnosti výnosové křivky (3 a 6 měsíců), zatímco swapce se používají pro delší splatnosti (od 2 do 10 let).

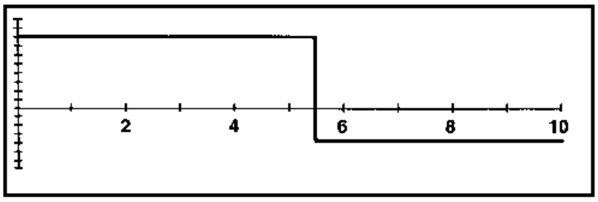
Parametry swapce (BAZ(2004)):

- druh swapu (prodejní nebo kupní),
- čas do vypršení opce,
- splatnost (maturity) podkladového swapu,
- jmenovitá hodnota,
- realizační cena (sazba) (strike rate).

Např. 5x10 kupní swapce s jmenovitou hodnotou 100 mil. Kč a realizační sazbou 7% je pětiletá opce na swap, který bude vyplácet ročně 7% a půlročně přijímat šestiměsíční PRIBOR na 100 mil. Kč po dobu 10 let od vypršení opce, pokud tato byla uplatněna. Výplata swapce při vypršení je $\max(0, V_{swap})$, kde V_{swap} je hodnota swapu, jehož pevná úroková míra je rovna realizační sazbě (při vypršení swapce).

Binární (digitální) opce - digi cap, digi floor (HVB Bank a.s.)

Binární opce poskytují kupujícímu pevné výplatní schéma. To znamená, že kupující obdrží stejnou výplatu bez ohledu na to, jak hodně je opce v penězích (in-the-money). Jsou celkem snadné na pochopení a bývají levnější než klasické opce. Používají se tam, kde klient předpokládá malé pohyby v podkladové sazbě - mějme např. klienta, který odhaduje, že tříměsíční PRIBOR bude těsně pod 5,50%. Může si koupit floor s realizační



Obr. 8: Binární opce

sazbou 5,50%, ale to mu pravděpodobně poskytne malou výplatu, pokud referenční sazba uzavře např. na 5,45%. Místo toho si může koupit binární opci, která garantuje stejný výnos bez ohledu na to, jestli PRIBOR uzavře na 5,49% nebo na 5,00%. Výnos při splatnosti viz obr. 8. Tato opce má také využití v různých strukturovaných produktech.

Tržní konvence je ta, že výnos je pevně stanoven na 100 bp (basis points, 100bp = 1%) a k tomu je také upravena cena prémie. Tato konvence potom umožňuje snadné srovnání podle výplatního poměru. Pokud byla prémie v předchozím příkladu 50 bp a výplata byla 100 bp, tak potom výplatní poměr je 2:1.

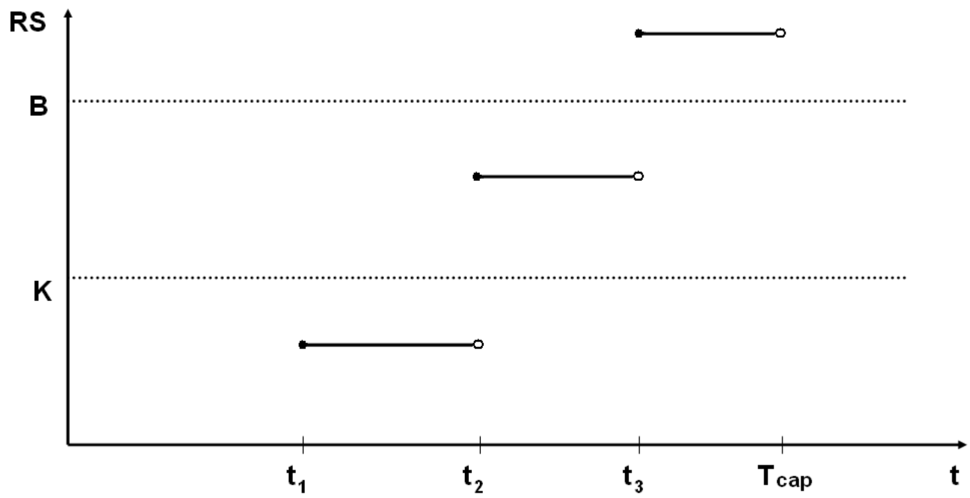
Bariérová opce(KB a.s., ČS a.s.)

Kromě parametrů klasické úrokové opce (viz výše) je součástí opce definovaná úroveň referenční úrokové sazby - bariéra, jejíž překročení aktivuje nebo naopak deaktivuje opční právo v době do dospělosti opce.

Bariéry:

- Up-and-Out
- Down-and-Out
- Up-and-In
- Down-and-In

což je, vzato v úvahu s možností kupní nebo prodejní opce, celkem 8 typů. Je možné se setkat i s jiným značením, kde „Out“ je značeno jako „Knock-out“ a „In“ jako „Knock-in“. „In“ v názvu bariéry znamená, že prolomením bariéry je držitel oprávněn k nabytí dané opce, např. Up-and-In opce se aktivuje když referenční sazba překročí bariéru



Obr. 9: Up-and-Out cap opce: V čase fixace t_1 je $K > RS < B$, takže v čase t_2 není žádné plnění. V čase fixace t_2 je $K < RS < B$, takže v čase t_3 dojde k dorovnání rozdílu RS–K. V čase fixace t_3 je $K < RS > B$, takže v čase T není opět žádné plnění.

zdola. „Out“ znamená, že neprolomením bariéry je držitel oprávněn k nabytí dané opce. „Down“ v názvu znamená, že bariéra je umístěna pod počáteční spotovou cenu (dochází k prolomení bariéry shora), „Up“ naopak nad počáteční spotovou cenu (prolomení zdola) (DĚDEK(2004)).

Příklad cap Up-and-Out opce (B - bariéra, RS - referenčí sazba, K - realizační sazba): Pokud je v době fixace referenční sazby $K > RS < B$, tak není žádné plnění, pokud $K < RS < B$, tak dojde k dorovnání rozdílu RS–K a pokud $K < RS > B$, tak k plnění opět nedochází (viz obr. 9). Používá se k zajištění úrokových nákladů na předem definované úrovni úrokové sazby (realizační sazba) s tím, že zajištění je limitované Up-and-Out bariérou (limitní úroková sazba).

Někdy bývá předem dohodnuta částka, která je vyplacena v případě, že nedojde k splnění podmínek (prolomení resp. neprolomení bariéry, podle typu), za kterých je držitel oprávněn k nabytí dané opce. Jedná se o tzv. refundaci. Ovšem takovéto opce s refundací nejsou příliš často obchodovány, což platí také pro ČR.

I zde mohou existovat modifikace, např. **Step-up triggered cap** (ČS a.s.). Oproti cap Up-and-Out je schéma plnění následující: Pokud $K > RS < B$, tak není žádné plnění, pokud $K < RS < B$, tak dojde k dorovnání rozdílu $RS–K$ a pokud $K < RS > B$, tak dojde k dorovnání rozdílu $RS–B$. Oproti cap Up-and-Out zde bariéra představuje maximální úrokový náklad.

KB a.s. ve své nabídce dále uvádí možnost vybrat si variantu opce podle doby uplatnění:

- evropská opce - může být uplatněna pouze při splatnosti opce.
- americká opce - může být uplatněna kdykoli doby dospělosti opce.
- bermudská opce - je opce, jejíž včasnější uplatnění je omezeno určitým datem během života opce, tj. svým charakterem leží někde mezi evropskou a americkou opcí (ostrov Bermuda leží mezi Amerikou a Evropou). Tímto určitým datem je datum „dřívější“ splatnosti. Před tímto datem má vlastnosti evropské opce, po tomto datu se chová jako americká opce.

3.4 Modifikace

Každá z bank uvedla, že její nabídka je neúplná, že se jedná pouze o standardní nabídku. Pro významné objemy lze pak sjednat individualní modifikace standardně nabízených produktů, které mají např. odlišné úrokové konvence, než je standard pro danou měnu nebo mají jiné speciální amortizační schéma. Dále se jedná o produkty, které nejsou v běžné standardní nabídce (řada těchto produktů byla už zmíněna v dřívejším textu jako modifikace) a o obchody sestávající se z několika standardních produktů svázané do jedné strategie. Záleží na klientovi - vytvoří se strategie uzpůsobená individuálním požadavkům, rizikovému a výnosovému profilu. Jedná se o strategie, jejichž produktový ekvivalent nelze obvykle na trhu nalézt. Asi nejjednodušším příkladem je collar - kombinace opce cap a floor (viz výše), který je ovšem tak běžný, že se nachází už ve standardní nabídce. Dalším příkladem by mohla být bariérová opce s refundací, pokud není ve standardní nabídce. Tu je možno vytvořit např. kombinací jednoduché a binární opce.

4 Metody ohodnocení

4.1 Výnosová křivka

4.1.1 Definice

Tato kapitola se zabývá základními technikami stanovení reálné hodnoty finančních derivátů. Pozornost je zaměřena na ocenění základních a nejpoužívanějších nástrojů. Základem stanovení reálné hodnoty finančních nástrojů je výnosová křivka, protože je nezbytným vstupem při jakémkoli oceňování. Výnosová křivka znázorňuje závislost úrokové míry (výnosu) na splatnosti. Existuje několik typů výnosových křivek a to s ohledem na typ úrokové míry a také s ohledem na to, z kterých finančních nástrojů je daná křivka konstruovaná. Nyní budou uvedeny definice úrokové míry pro spojité úročení (z důvodu pozdějšího využití při popisu pokročilejších oceňovacích modelů), které jsou potřeba k dalšímu popisu různých typů výnosových křivek.

Úrokové míry

Definujme $P(t, T)$ jako hodnotu v čase t určitého hotovostního toku X ve známém čase v budoucnosti T, kde X je jmenovitá hodnota (face value) a T je splatnost (maturity). Tzn., že $P(T, T) = 1$. Potom v čase t při spojitém úročení je spotová úroková míra (spot rate) $R(t, T)$ splatnosti T definována (REBONATO(1996))

$$P(t, T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \tag{5}$$

$$R(t, T) = -\frac{\ln\left[P(t, T)\right]}{T - t} \tag{6}$$

Z tohoto vztahu, který definuje úrokovou míru vždy pro určitou časovou délku, je možné zjistit současnou nebo jinak řečeno okamžitou úrokovou míru (instantaneous rate), na níž je postavena velká rodina modelů pro oceňování úrokových derivátů, do níž patří dále detailně vysvětlený Hullův-Whiteův (HW) model. Tato okamžitá úroková míra sděluje, za jakou úrokovou míru si vypůjčíme, pokud je výpůjčka (téměř) ihned opět splacena. Jestliže si půjčujeme v čase t na periodu Δt, kde Δt je malý časový přírůstek, potom (BAXTER(1996))

$$R(t, t + \Delta t) = -\frac{\ln[P(t, t + \Delta t)]}{\Delta t} \tag{7}$$

Pro $\Delta t \to 0$ získáváme okamžitou úrokovou míru

$$r_t = R(t, t) = -\frac{\partial \ln[P(t, t)]}{\partial T} \tag{8}$$

Pro oceňování a konstrukci výnosové křivky má velký význam spotová úroková míra pro čas $t = 0$, $R(0, T)$, která se v praxi nazývá buď také jako spotová úroková míra nebo nulová úroková míra (zero rate). Další typ je forwardová úroková míra, která vyjadřuje výnos, jenž se očekává mezi dvěma daty v budoucnosti. S použitím předchozí terminologie ji definujeme jako (opět spojité úročení) (BAXTER(1996))

$$\frac{P(t, T + \Delta t)}{P(t, T)} = e^{-f(t,T,T+\Delta t)\Delta t} \tag{9}$$

$$f(t, T, T + \Delta t) = -\frac{\ln[P(t, T + \Delta t)] - \ln[P(t, T)]}{\Delta t} \tag{10}$$

V praxi se používá a jako forwardová míra označuje výše definovaná forwardová míra v čase $t = 0$. Pro úplnost, pokud $\Delta t \to 0$, pak získáváme okamžitou forwardovou úrokovou míru, která představuje v čase t okamžitou úrokovou míru v čase T (REBONATO(1996))

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln[P(t, T)]}{\partial T} \tag{11}$$

Je patrné, že $r_t = R(t, t) = f(t, t)$. Rovnici (11) můžeme dále upravit

$$\int_t^T \mathrm{d}\ln P(t,s) = -\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s = \ln\left(P(t,T)\right) - \ln\left(P(t,t)\right) \tag{12}$$

protože $P(t,t) = 1$, můžeme psát

$$-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s = \ln\left(P(t,T)\right) \tag{13}$$

a odtud dostaneme alternativní vztah pro $P(t,T)$ (REBONATO(1996))

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds} \tag{14}$$

Druhy výnosových křivek (JÍLEK(2002))

Výnosová křivka (yield curve, term structure of interest rates) je závislost výnosnosti do splatnosti dluhových nástrojů státu (státní, bezriziková výnosová křivka) nebo bank (bankovní výnosová křivka) na jejich splatnosti. Výnosovou křivku můžeme dělit:

- Spotová výnosová křivka (spot yield curve, zero rate curve) je momentální závislost výnosnosti do splatnosti dluhových nástrojů (jedná se o výnos $R(0,T)$ definovaný výše). V dnešní době, pokud někdo mluví o výnosové křivce, má většinou na mysli právě tento druh.

- Forwardová výnosová křivka (forward yield curve) je odhad výnosové křivky k určitému datu v budoucnosti. Obvykle se stanoví ze spotové výnosové křivky (jedná se o výnos $f(0,T_1,T_2)$ definovaný výše).

- Par výnosová křivka (par yield curve) je momentální závislost výnosnosti do splatnosti (tj. v daném případě kuponové míry) kuponových dluhopisů o jejich reálné hodnotě, která se rovná jmenovité hodnotě dluhopisů. Příkladem je swapová výnosová křivka (swap yield curve), která vyjadřuje závislost kotace úrokového swapu na splatnosti swapu. Swapová výnosová křivka bývá umístěna nad státní (bezrizikovou) par výnosovou křivkou o tzv. swapové rozpětí (swap spread), neboť u swapů se nejedná o zcela bezrizikovou úrokovou míru, i když v úvěrovém riziku je pouze reálná hodnota swapu, nikoli však jmenovitá hodnota. Swapová výnosová křivka se používá jako referenční křivka zejména v EU, neboť trh se státními dluhopisy v EU není homogenní, ale stále se liší podle jednotlivých zemí. Neexistuje tudíž homogenní výnosová křivka eurových státních dluhopisů v rámci eurozóny. Swapová křivka se tak stala standardem pro celý dluhopisový trh v eurozóně.

4.1.2 Konstrukce spotové výnosové křivky

Samotný způsob konstrukce spotové výnosové křivky je velmi důležitý, protože v konečném důsledku samozřejmě ovlivňuje výsledné ocenění daného derivátu - výnosová křivka je důležitou vstupní hodnotou v oceňovacích modelech a vzorcích. Jedná se však o technický text, který není nezbytný při další argumentaci (je však nutný k ozřejmění předpokladů, z kterých by se vycházelo při srovnávacím ocenění v další části práce) a tak je konstrukce výnosové křivky použité při výpočtech v této práci popsána v appendixu A.

4.1.3 Praktické záležitosti

V této sekci budou popsány praktické záležitosti týkající se výnosové křivky, které mohou být důležité pro výsledné ocenění nástroje. Bývají specifikovány v obchodním kontraktu.

Konvence počítání dní

Pro přesné ohodnocení daného nástroje je nutné znát také konvenci dní, která se u daného typu používá. Konvence počítání dní nám říká, jak spočítat počet dní mezi dvěmi daty. Nejběžnější konvence jsou 30/360, 30/360 evropská, act/365 a act/act. První číslo obvykle označuje počet dní v měsíci, druhé číslo počet dní v roce. Bližší specifikace konvencí (JÍLEK(2005), STANDER(2005)):

- act/act - Existují různé definice této konvence. Podle ISDA definice je v čitateli skutečný počet dní a ve jmenovateli je 366, pokud dané akruální období zasahuje do přestupného roku. Jinak je jmenovatel 365. Podle AFB (Association Francaise de Banques) metody je jmenovatel 365, jestliže akruální období neobsahuje 29. únor. Pokud obsahuje, potom je 366.

- 30/360 - V čitateli mají všechny měsíce 30 dní, což za rok činí 360 dní se dvěma výjimkami. První den akruálního není 30. nebo 31. a poslední den období je 31. měsíce, potom tento měsíc má 31 dní. Jestliže poslední den období je poslední den února, potom se únor neprodlužuje na 30 dní. Ve jmenovateli je vždy 360 dní.
- 30E/360 - Jedná se o evropskou verzi 30/360. V čitateli mají všechny měsíce 30 dní, což za rok činí 360 dní, s jednou výjimkou. Jestliže poslední den období je poslední den února, potom se únor neprodlužuje na 30 dní. Ve jmenovateli je vždy 360 dní.
- act/360 a act/365 - V čitateli je skutečný počet dní mezi dvěma daty a ve jmenovateli je 360, příp. 365 dní.

Pravidlo pracovního dne

Pravidlo pracovního dne se používá, pokud datum vypořádání připadne na svátek či víkend. Datum vypořádání daného nástroje se potom posune dopředu nebo dozadu:

- Pravidlo následujícího pracovního dne - Datum vypořádání se posune na nejbližší následující pracovní den.
- Pravidlo modifikovaného následujícího pracovního dne - Datum vypořádání se posune na nejbližší následující pracovní den. Pokud ovšem následující pracovní den není ve stejném měsíci, potom se datum vypořádání posune na nejbližší předchozí pracovní den.
- Pravidlo předchozího pracovního dne - Datum vypořádání se posune na nejbližší předchozí pracovní den.
- Pravidlo modifikovaného předchozího pracovního dne - Datum vypořádání se posune na nejbližší předchozí pracovní den. Pokud ovšem předchozí pracovní den není ve stejném měsíci, potom se datum vypořádání posune na nejbližší následující pracovní den.

4.2 Další oceňovací modely

Vzhledem k odlišnosti jednotlivých nástrojů je jasné, že není možné použít jen jednu oceňovací metodu. V případě nejjednodušších úrokových derivátů (FRA, klasický swap) postačí aktuální výnosová křivka. U opcí a složitějších úrokových derivátů je ocenění obtížnější. Panuje zde různorodost v existujících oceňovacích modelech. Na základě dotazníkového průzkumu lze říci, že opce evropského typu se oceňují pomocí Blackova-Scholesova (BS) vzorce, zatímco pro americké, bermudské opce a složitější modifikace úrokových derivátů se používají jiné modely. Z tohoto důvodu bude ocenění pomocí BS modelu ukázáno, nicméně platí, že i v případě evropských úrokových opcí by měly být použity jiné modely, protože BS není úplně vhodný. Jeden důvod je, že jev, který se snažíme modelovat - náhodné pohyby celé výnosové křivky - je mnohem složitější než pohyby ceny akcie nebo indexu (tj. v případě podkladových aktiv, kde je použití BS modelu běžné). Je to rozdíl v dynamice skalární veličiny (cena akcie) a vektoru (výnosová křivka). Druhým důvodem je, že BS je sice vnitřně konzistentní při použití k ocenění např. capu, flooru nebo swapce, ale aby mohl být BS použit, je nutné vždy upravit předpoklady o pravděpodobnostním rozdělení, což vede k tomu, že takto oceněné nástroje potom nejsou konzistentí navzájem. Jedná se o „ad hoc" adaptace BS vzorce. Proto se k ocenění úrokových derivátů používá jiná (konzistentní) metoda - přímé modelování úrokových měr, vlastního zdroje nejistoty.

4.2.1 Black - Scholes

BS vzorec (1973) se stal standardem pro oceňování opcí na akcie a vyjadřuje matematicky opční prémii jako funkci pěti proměnných: $S(t)$(promptní cena podkladové akcie), X (realizační cena akcie), $(T-t)$ (doba do splatnosti obce), σ (volatilita ceny akcie) a r (bezriziková úroková míra). Opční prémie stanovená výpočetně pomocí oceňovacích opčních modelů tohoto typu se nazývá teoretická opční prémie (fair option premium) a v praxi se využívá jako přijatelná aproximace skutečné opční prémie (NEKULA(2004)).

Předpoklady modelu jsou:

- Cena akcie $S(t)$ s trendovým koeficientem μ (míra zisku plynoucího ze změn tržní ceny akcie) a volatilitou (rizikem) tržní ceny akcie kvantifikující kolísání této ceny σ se řídí Wienerovým procesem $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)$.

- U podkladové akcie je možný krátký prodej (short selling).
- Neexistují arbitrážní příležitosti.
- Obchodování probíhá ve spojitém čase.
- Neexistují transakční náklady a daně.
- Existuje dokonalá dělitelnost akcií.
- Existuje bezriziková úroková míra, která je konstantní a stejná pro všechna data splatností.
- Cena akcie $S(t)$ má v době splatnosti opce logaritmicko normální rozdělení.

Volatilitou ceny akci, které dosazujeme do vzorce, je myšlena její co nejpravděpodobnější hodnota v budoucnosti. Její odhad lze získat různě. Buď pro takovýto odhad použijeme historická data a potom se jedná o historickou volatilitu. Vypočítá se jako směrodatná odchylka kurzu akcie. Dalším typem volatility může být předpovídaná volatilita. Metody, které se používají pro její výpočet, se pokouší o odhad volatility plynoucího z cenových změn akcie. Patří sem např. metoda klouzavých průměrů, metoda GARCH, či metoda exponenciálního vyrovnávání (NEKULA(2004)). Historická i předpovídaná volatilita je přímo spojena s podkladovou akcií. Mimoto je ještě možné volatilitu stanovit také ze známé ceny opce. Takto stanovenou volatilitu nazýváme implikovanou volatilitou a můžeme ji použít pro výpočet ceny jiné opce.

Očekávaná hodnota opční prémie evropské opce call v době splatnosti je (HULL(2003))

$$E[\max(S(T) - X, 0)] = E(S(T))N(d_1) - XN(d_2). \qquad (15)$$

Diskontujeme-li k okamžiku t a uvědomíme-li si, že v tomto okamžiku $E(S(T)) = S(t)e^{r(T-t)}$, tak můžeme psát

$$C(t) = e^{-r(T-t)}[S(t)e^{r(T-t)}N(d_1) - XN(d_2)]. \tag{16}$$

BS vzorec pro opční prémii evropské opce call na akcii nevyplácející dividendy s realizační cenou X je potom (HULL(2003))

$$C(t) = S(t) \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2), \tag{17}$$

kde $N(\cdot)$ je distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení $N(0;1)$ a

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(t)}{X} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

BS vzorec pro opční prémii evropské opce put na akcii nevyplácející dividendy dostaneme ze vzorce (17) snadno pomocí put-call parity (viz např. HULL(2003)) ve tvaru

$$P(t) = X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S(t) \cdot N(-d_1). \tag{18}$$

Podrobné odvození BS viz NEKULA(2004). Úpravy BS vzorce pro použití u úrokových derivátů bude ukázáno u konkrétních nástrojů.

4.2.2 Hull - White

Jak již bylo výše popsáno, k ocenění úrokových derivátů se používají jiné, konzistentnější modely než BS. Tyto modely rozlišujeme na dvě skupiny. Na rovnovážné modely (equilibrium models) a modely neumožňující arbitráž (no-arbitrage models). U rovnovážných modelů je počáteční výnosová křivka výstupem, u bezarbitrážních naopak vstupem, z čehož jde vidět, že pouze rovnovážné modely jsou skutečnými modely, které se snaží modelovat výnosovou křivku. Obvykle definují nějaké předpoklady o ekonomických veličinách a potom se snaží odvodit vývoj bezrizikové okamžité úrokové míry r (short-term rate) (děje se to většinou pomocí konstantních na čase nezávislých parametrů, které se odhadují z časových řad výnosové křivky). Následně určí podle tohoto vývoje cenu daného derivátu. Nevýhodou těchto modelů je, že neodpovídají aktuální výnosové křivce a proto se pro oceňování příliš nepoužívají. Na druhou stranu bezarbitrážní modely jsou konstruovány tak, aby přesně odpovídaly aktuální výnosové křivce. K jejich správnému použití je ještě třeba odhadnout parametry na základě existujících cen derivátů pomocí tzv. kalibrace (v případě, že tyto ceny jsou nespolehlivé nebo neexistují, tak se používají rovnovážné modely). Tato skupina modelů je nejpoužívanější a dělí se dále na tři podskupiny (HULL,WHITE(2000), LEE(2000)):

- Spotové modely (short (spot) rate models) - Jedná se o první generaci modelů a dnes nejrozšířenější. Všechny modely zjištěné průzkumem v této práci patří do této skupiny a proto je zbytek práce na ně zaměřen. Jejich největší předností je výpočetní rychlost a schopnost ocenit většinu úrokových derivátů. Modelují vývoj okamžité úrokové míry (instantaneous (short,spot) rate, definice viz kapitola 4.1.1). Nejrozšířenější jsou jednofaktorové verze, což znamená, že výnosová křivka je charakterizována jedinou stochastickou stavovou veličinou, v tomto případě okamžitou úrokovou mírou. Jejich nevýhodou je, že jsou obtížnější na pochopení, což je vyváženo ale tím, že je možná implementace ve formě stromu úrokových měr, který je podobný stromu akcií poprvé použitý v práci autorů Cox, Ross & Rubinstein (1979). Nejznámějšími modely této třídy jsou Hull & White (HW, 1990), Ho & Lee (HL, 1986), Black-Derman-Toy(BDT, 1990) a Black & Karasinski (BK, 1991).

- Forwardové modely (forward rate models) - První model této skupiny byl představen v práci autorů Heath, Jarrow & Morton (HJM, 1992). Modelovanou veličinou je zde okamžitá forwardová úroková míra (instantaneous forward rate). Tyto modely jsou lehčí na pochopení a umožňují větší flexibilitu než předchozí skupina, ale je těžké je implementovat. Vzhledem ke vztahu mezi spotovou a forwardovou mírou (viz kapitola 4.1.1) je možné ukázat, že každý spotový model je možné popsat v rámci modelu HJM.

- Tržní modely (market models) - Jedná se o modifikace HJM autory Brace, Gatarek & Musiella (1997), Jamshidian (1997) a Miltersen, Sandmann & Sondermann (1997). Tyto modely se snaží odstranit nevýhodu HJM modelů. Ty totiž používají spojité úročení, které je sice výhodné z teoretického hlediska, ale ne z praktického. Na místo toho se používají diskrétní úrokové míry. Nevýhodou je opět obtížnost implementace.

Detailnější popis modelů HL, BDT a BK

- HL je jednofaktorový spotový model s normálním rozdělením spotových úrokových měr. Volatilita úrokové míry je konstantní. Ve spojitém čase má tvar (FABOZZI(2002))

$$dr = \Theta(t) + \sigma dw, \tag{19}$$

  kde $\Theta(t)$ zajišťuje konzistenci s aktuální výnosovou křivkou. Jeho výhodou je výpočetní rychlost a existence analytického řešení pro deriváty evropského typu. Nevýhodou je, že z normálního rozdělení úrokových měr plyne, že je zde nenulová pravděpodobnost, že úroková míra bude nulová nebo záporná.

- BDT je jednofaktorový spotový model s logaritmicko normálním rozdělením spotových úrokových měr, takže se nemůže stát, že by byly záporné. Volatilita logaritmické úrokové míry je konstantní. Ve spojitém čase má tvar (FABOZZI(2002))

$$d\log(r) = [\Theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\log(r)]dt + \sigma(t)dw, \tag{20}$$

  kde $\sigma'(t)$ je derivace volatility podle času t. Tento model nemá žádné analytické řešení.

- BK je jednofaktorový model, který je velmi podobný HW. Ve spojitém čase má tvar (FABOZZI(2002))

$$d\log(r) = [\Theta(t) + a(t)\log(r)]dt + \sigma(t)dw. \tag{21}$$

Kromě těchto jednofaktorových modelů existují i vícefaktorové (např. dvou). Liší se v tom, že obsahují kromě úrokové míry další stochastickou veličinu (zdroj nejistoty), čímž umožňují realističtější modelování výnosové křivky.

Charakteristika HW

HW model patří do skupiny jednofaktorových modelů, který je konzistentní s aktuální výnosovou křivkou a obecný tvar je (HULL,WHITE(2000))

$$df(r) = [\Theta(t) - a(t)f(r)]dt + \sigma(t)dw,$$

kde $f(r)$ je určitá funkce okamžité úrokové míry, která se řídí gaussovským difúzním procesem a dw představuje Wienerův proces. Funkce $\Theta(t)$ je zvolena tak, aby byl model v souladu s výnosovou křivkou a funkce $a(t)$ a $\sigma(t)$ jsou funkce rozptylu, které jsou vybrány tak, aby odpovídaly cenám aktivně obchodovaných úrokových opcí. Promenná $a(t)$ určuje tzv. „mean-reverting“ proces, což znamená, že tento model má určitou hodnotu (časově závislou, ale deterministickou), kolem které se úroková míra pohybuje. Tento zobecněný model v sobě obsahuje jako speciální případy spotové modely HL, BDT a BK. Pokud $f(r) = r$, $a(t) = 0$ a σ je konstantní, potom se jedná o HL. Pokud $f(r) = \log(r)$, $a(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$ a $\sigma'(t) = \frac{\partial\sigma(t)}{\partial t}$, pak je to BDT (HULL,WHITE(1996)). Pokud $f(r) = \ln(r)$, potom jde o BK. Pokud $f(r) = r$ a $a(t)$ je nenulové, potom se jedná o originální model HW z roku 1990. Pro další práci je uvažován případ, kdy $a(t)$ a $\sigma(t)$ jsou konstanty větší než nula, takže rovnice HW má potom tvar (KOHN(2004))

$$dr(t) = [\Theta(t) - ar]dt + \sigma dw. \tag{22}$$

Řešení pro $r(t)$ je následující (KOHN(2004))

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t \Theta(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau + \sigma \int_s^t e^{-a(t-\tau)}dw(\tau). \quad (23)$$

Dále je potřeba, aby byl model konzistentí s aktuální výnosovou křivkou. Je možné ukázat (viz KOHN(2004)), že platí vztah mezi funkcí $\Theta(t)$ a okamžitou forwardovou úrokovou mírou

$$\Theta(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,t) + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}). \quad (24)$$

Z rovnice (24) ovšem plyne, že kvůli konzistenci s aktuální výnosovou křivkou je nutné určit derivovaný člen $\frac{\partial f}{\partial t}(0,t)$. To je nepříjemné, protože by došlo ještě k větší chybě dané odhadem forwardové míry. Kalibraci na výnosovou křivku lze však provést i pomocí rovnice, kde vystupuje pouze forwardová míra f. Uvažujme nyní jiný tvar řešení $r(t)$ následovně (HULL(2003))

$$r(t) = \alpha(t) + x(t), \quad (25)$$

kde $\alpha(t)$ je deterministická proměnná a $x(t)$ je proces

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dw. \quad (26)$$

Jedná se vlastně o rovnici (22), kde $\Theta(t) = 0$. Řešení je potom shodné s (23) s tím rozdílem, že vypadne člen $\int_s^t \Theta(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau$. Pokud má být (25) řešením (22), tak postupnými výpočty se dojde k výsledku

$$\alpha(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 \quad (27)$$

a celkově tedy (KOHN(2004))

$$r(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 + x(t), \tag{28}$$

takže dekompozice (25) skutečně určuje $r(t)$ jako součet dvou výrazů: deterministického $\alpha(t)$, který odráží výnosovou křivku v čase 0 a náhodný proces $x(t)$, který celkově závisí na tržních datech.

HW model umožňuje díky volbě $f(r) = r$ analytická řešení pro některé běžné deriváty, ovšem v této skupině modelů je to spíše ojedinělé. Nevýhodou modelu je jako v případě HL to, že umožňuje i záporné úrokové míry. Pokud v dané ekonomice převládají nízké úrokové míry, je lepší použít model BK, který umožňuje pouze kladné. HULL(2003) uvádí, že BK model je vhodný tam, kde $r < 1\%$, zatímco původní verze HW ($f(r) = r$) tam, kde $r > 1\%$. Vzhledem k tomu, že pro ČR a potažmo eurozónu platí, že $r > 1\%$, tak se další část práce věnuje detailně původní verzi HW.

Numerická implementace trinomického úrokového stromu v HW modelu, který umožní ocenit i deriváty, pro které analytické řešení neexistuje a která je použita ve funkcích, pomocí kterých je provedeno srovnávací ocenění v pozdější části práce, je vzhledem ke svému rozsahu a technickému rázu popsána v appendixu B (na tento popis se však odvolává další text).

Kalibrace

Kalibrovaný model je model, jehož hodnoty parametrů jsou konzistentní s tržními cenami. Kalibrace znamená najít takové hodnoty parametrů, aby bylo možno co nejpřesněji reprodukovat ceny nástrojů, které se obchodují na trhu. V HW modelu je vlastně dvojí kalibrace - na výnosovou křivku (model přesně ocení dluhopisy s nulovými kupony), což už bylo popsáno, a na nástroje obchodované na trhu. Jejich ceny získáme z kotovaných implikovaných volatilit.[10] Zde máme také dvojí volbu. Buď použijeme ceny všech nástrojů

[10]Implikovaná volatilita je kotována zpravidla bankami a dostupná je z informačních systémů jako je např. Bloomberg. V současné době je však dostupná pouze volatilita na běžně obchodovanou měnu (např. EUR, USD, GBP apod. pro různé splatnosti např. 3M, 6M, 9M...).

a naše parametry budou jakýmsi „průměrem“ těchto nástrojů nebo použijeme jenom ty nástroje, které jsou podobné tomu, který oceňujeme. Např. chceme ocenit bermudskou swapci, která je uplatnitelná ode dneška za pět let do devíti let na swap, který má splatnost ode dneška deset let . Potom můžeme použít ceny evropské swapce následujících splatností: $5 \times 5, 6 \times 4, 7 \times 3, 8 \times 2$ a 9×1. Data pro kalibraci lze získat od třetích stran, např. od poskytovatele dat Bloomberg. Kalibrace je v určitém smyslu spíše umění než přesný exaktní postup a její výsledek je do jisté míry ovlivněn tím, kdo kalibraci provádí.

U HW modelu chceme odhadnout dva parametry, a a σ: σ určuje celkovou volatilitu a a relativní. Předpokládejme, že máme M evropských úrokových derivátových nástrojů (záleží na volbě), potom minimalizujeme vzhledem k a a σ tuto funkci (CLEWLOW(1998)):

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{M} \left(\frac{model_i(a, \sigma) - market_i}{market_i} \right)^2}, \tag{29}$$

kde $model_i(\alpha, \sigma)$ je cena nástroje spočtená HW modelem a $market_i$ je cena na trhu. V praxi existují různé numerické postupy k výpočtu této funkce (např. v HULL(2003) doporučovaný Levenbergův-Marquardtův algoritmus), ale může to být také např. standardní doplněk Řešitel programu Microsoft Excel.

4.3 Ocenění produktů

V této části budou oceněny základní produkty vyskytující se v nabídce všech bank s využitím teoretického aparátu předchozí kapitoly.

4.3.1 Reálná hodnota derivátu

Při oceňování se zjišťuje reálná hodnota derivátu (fair value of derivative), která se rovná součtu reálných hodnot podkladových pohledávek (s kladným znaménkem) a reálných hodnot podkladových závazků (se záporným znaménkem):

$$\begin{aligned}\text{reálná hodnota derivátu} = \; & \textstyle\sum_{i=1}^{n} \text{reálná hodnota podkladových pohledávek}- \\ & - \textstyle\sum_{i=1}^{n} \text{reálná hodnota podkladových závazků.}\end{aligned}$$

V případě, že podkladový nástroj je spojen pouze s peněžními toky, jeho reálná hodnota se rovná součtu diskontovaných peněžních toků (pevně stanovených či případně vypočítaných) v určitých časových okamžicích v budoucnosti. Reálná hodnota derivátu je až na znaménko pro obě strany stejná. Pokud by neexistovalo rozpětí mezi kotací poptávky a nabídky, v okamžiku sjednání jakéhokoli derivátu by jeho reálná hodnota musela být nulová. Pokud vezmeme v úvahu rozpětí mezi kotací poptávky a nabídky, potom je pro tvůrce trhu reálná hodnota derivátu mírně kladná a pro konečného uživatele mírně záporná.

4.3.2 FRA

Nejprve bude popsán postup pro ocenění bezkuponového dluhopisu o nominální hodnotě 1 ($P(T,T) = 1$) v trinomickém stromu (dále bude při oceňování některých produktů HW modelem opakovaně používán). Mějme dluhopis se splatností s. Nechť N_s představuje počet časových kroků do splatnosti s ($s = N_s \Delta t$). Nechť $P_s(i,j)$ představuje hodnotu dluhopisu v uzlu (i,j). Protože v čase s je hodnota dluhopisu bez ohledu na předchozí vývoj úrokových měr rovna jedné, je $P_s(N_s, j) = 1$ pro všechna j v časovém kroku N_s. Odtud se potom zpětnou indukcí výpočtem hodnoty dluhopisu v každém uzlu určí jeho konečná hodnota:

$$P_s(i,j) = d(i,j) \times [p^u(i,j)P_s(i+1,u) + p^m(i,j)P_s(i+1,m) + p^d(i,j)P_s(i+1,d)], \quad (30)$$

kde $d(i,j) = e^{-r(i,j)\Delta t}$ je diskontní faktor.

Jak již bylo zmíněno v základní charakteristice FRA, kompenzační platba rozdílu mezi FRA sazbou a referenční sazbou se uskutečňuje na začátku relevantního úrokového FRA období. Výše této vypořádací částky je pro stranu, která je kupující, následující:

$$V = \frac{(r_{ref} - r_{FRA}) \times M \times \frac{n}{360}}{1 + (r_{ref} \times \frac{n}{360})}, \qquad (31)$$

kde

V = vypořádací hodnota (settlement value),

r_{ref} = referenční sazba (v den fixace),

r_{FRA} = FRA sazba,

M = objem kontraktu (částka),

n = počet dní FRA období.

Ocenění FRA kontraktu v období před vypořádacím dnem je dané vztahem

$$V = \frac{(r_F - r_{FRA}) \times M \times \frac{n}{360}}{1 + (r_2 \times \frac{t_2}{360})}, \qquad (32)$$

kde

r_F je forwardová úroková míra pro FRA období (forwardová referenční sazba),

r_2 je úroková míra splatnosti t_2 spotové výnosové křivky (zero rate).

a při uzavření obchodu je obvykle $r_F = r_{FRA}$, čili $V = 0$. Při oceňování FRA kontraktů se obvykle používá jednoduché úročení.

FRA je také možné ocenit pomocí HW modelu. K tomuto účelu je možné FRA nahlížet jako dluhopis a použít postup pro výpočet hodnoty dluhopisu s tím rozdílem, že konečná hodnota dluhopisu není jednotková, ale

$$V(T, j) = (r_F - r_{FRA}) \times M \times \frac{n}{360}, \qquad (33)$$

kde T je konec FRA období. Výpočet dále probíhá jako u ocenění dluhopisu v HW. Jedná se o obdobu vztahu (32).

4.3.3 Swapy

V této části bude uvedeno stanovení reálné hodnoty klasického úrokového swapu.

Předpokládejme obchodní stranu, která dostává proměnlivé platby a platí pevné platby ve třech okamžicích v budoucnosti a předpokládejme složené úročení s ročním připisováním úroků a konvenci act/360. Potom reálná hodnota činí (JÍLEK(2005)):

$$V = B_{fl} - B_{fix}, \tag{34}$$

$$V = \frac{(r_y - r_x)\frac{t_1 - t_0}{360}M}{(1 + r(0,1))^{T_1}} + \frac{(f(1,2) - r_x)\frac{t_2 - t_1}{360}M}{(1 + r(0,2))^{T_2}} + \frac{(f(2,3) - r_x)\frac{t_3 - t_2}{360}M}{(1 + r(0,3))^{T_3}}, \tag{35}$$

kde

V = reálná hodnota swapu,

$B_f l$ = reálná hodnota dluhopisu s proměnnou platbou,

$B_f ix$ = reálná hodnota dluhopisu s pevnou platbou,

r_x = pevná úroková míra,

r_y = poslední zafixovaná proměnlivá úroková míra,

t_0 = splatnost 0-té (tj. poslední dosud vyplacené) úrokové platby ve dnech,

t_i = splatnost i-té úrokové platby či jmenovité hodnoty ve dnech,

$r(0,i)$ = spotová úroková míra odpovídající splatnosti t_i,

$f(i,j)$ = forwardová úroková míra odpovídající splatnosti t_i až t_j,

M = jmenovitá hodnota,

T_i = splatnost i-té úrokové platby či jmenovité hodnoty v letech.

Rovnici (35) můžeme rozepsat následovně

$$V = \begin{array}{l} \frac{r_y \frac{t_1-t_0}{360} M}{(1+r(0,1))^{T_1}} + \frac{f(1,2)\frac{t_2-t_1}{360} M}{(1+r(0,2))^{T_2}} + \frac{(1+f(2,3))\frac{t_3-t_2}{360} M}{(1+r(0,3))^{T_3}} - \\ -\frac{r_x \frac{t_1-t_0}{360} M}{(1+r(0,1))^{T_1}} - \frac{r_x \frac{t_2-t_1}{360} M}{(1+r(0,2))^{T_2}} - \frac{(1+r_x)\frac{t_3-t_2}{360} M}{(1+r(0,3))^{T_3}}, \end{array} \tag{36}$$

Dosazením do tohoto vztahu za forwardové úrokové míry dostaneme přibližný vztah

$$V = \frac{(1+r_y)\frac{t_1-t_0}{360} M}{(1+r(0,1))^{T_1}} - \frac{r_x \frac{t_1-t_0}{360} M}{(1+r(0,1))^{T_1}} - \frac{r_x \frac{t_2-t_1}{360} M}{(1+r(0,2))^{T_2}} - \frac{(1+r_x)\frac{t_3-t_2}{360} M}{(1+r(0,3))^{T_3}}, \tag{37}$$

což lze zapsat obecně jako

$$V = \frac{(1+r_y)\frac{t_1-t_0}{360} M}{(1+r(0,1))^{T_1}} - \frac{r_x \frac{t_1-t_0}{360} M}{(1+r(0,1))^{T_1}} - r_x M \sum_{i=2}^{n} \frac{\frac{t_i-t_{i-1}}{360} M}{(1+r(0,i))^{T_i}} - \frac{M}{(1+r(0,n))^{T_n}}. \tag{38}$$

Je vidět, že swap lze nahlížet jako soubor dluhopisů o různých splatnostech, což lze využít při ocenění pomocí HW modelu. Pro každou splatnost se ocení daný dluhopis podle již obvyklého postupu pro ocenění dluhopisu v HW.

4.3.4 Úrokové opce

Ocenění opcí typu cap, floor a collar pomocí BS modelu

Ze vztahu (2) a (4) vidíme, že k ocenění opce cap a floor musíme ocenit jednotlivé caplety a floorlety. Opce typu collar je, jak již bylo uvedeno, pouze kombinace opcí cap a floor, takže hodnotu collaru získáme z hodnot cap a floor. Caplet a floorlet je možné ocenit pomocí BS modelu. Předpokládejme, že L_i má logaritmicko normální rozdělení s rozptylem σ_i. Potom ve vztahu (15) nahradíme cenu akcie úrokovou mírou L_i, takže dostaneme

$$E[\max(L(i) - X, 0)] = E(L(i))N(d_1) - KN(d_2). \tag{39}$$

Protože $P(0, t_i) = e^{-r_i}$ a $E(L(i))$ je forwardová úroková míra F_i pro periodu t_i, t_{i+1}, můžeme psát

$$C(i) = P(0, t_i)(F_i \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)). \tag{40}$$

Pro naše potřeby je ještě třeba upravit BS pro situaci, kdy počítáme výplatu pro hodnotu úrokové míry L v čase t_i, ale ke skutečné výplatě dojde teprve v období t_{i+1} (z definice capletu), následovně

$$C(i) = P(0, t_{i+1})(F_i \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)). \tag{41}$$

Připomeňme a přepišme rovnici (1) do tvaru (jedná se o výplatu opce typu cap v čase t_{i+1})

$$A\Delta t_i \max(L_i - K, 0), \tag{42}$$

kde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ (ostatní značení stejné jako v rovnici (1)). Hodnota capletu je potom (HULL(2003))

$$C(i) = A\Delta t_i P(0, t_{i+1})(F_i \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)), \tag{43}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{F_i}{K} + \frac{\sigma_i^2 t_i}{2})}{\sigma_i \sqrt{t_i}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_i \sqrt{t_i}.$$

Hodnota odpovídajícího floorletu (put opce) je

$$P(i) = A\Delta t_i P(0, t_{i+1})(K \cdot N(-d_2) - F_i \cdot N(-d_1)). \tag{44}$$

Ocenění opcí typu cap, floor a collar pomocí HW modelu

HULL(2003) ukazuje, že úroková opce typu cap může být také formulována jako portfolio put opcí na bezkupónový dluhopis. Výplata v rovnici (42) v čase t_{i+1} odpovídá výplatě

$$\frac{A\Delta t_i}{1 + L_i \Delta t_i} \max(L_i - K, 0) \tag{45}$$

v čase t_i. To lze přepsat jako

$$\max\left[A - \frac{A(1 + K\Delta t_i)}{1 + L_i \Delta t_i}, 0\right]. \tag{46}$$

Výraz

$$\frac{A(1 + K\Delta t_i)}{1 + L_i \Delta t_i} \tag{47}$$

potom představuje hodnotu bezkuponového dluhopisu v čase t_i, který vyplací $A(1 + K\Delta t_i)$ v čase t_{i+1}. Rovnice (46) potom představuje výplatu put opce se splatností t_i

na bezkuponový dluhopis splatnosti t_{i+1}, který má jmenovitou hodnotu $A(1 + K\Delta t_i)$ a uplatňovací cena opce je A. Odtud spolu s (2) plyne, že opci typu cap můžeme vyjádřit jako porfolio evropských put opcí na bezkuponový dluhopis.

Analogicky lze odvodit, že opci typu floor lze chápat jako portfolio evropských call opcí na bezkuponový dluhopis. Z předchozího lze vidět, že k ohodnocení opcí typu cap, floor a collar můžeme využít hodnotu bezkuponového dluhopisu.

Vezměme hodnotu bezkuponového dluhopisu tak, jak byl definován na začátku kapitoly. Označme $C(i,j)$ jako hodnotu opce v uzlu (i,j). Hodnota v tomto uzlu záleží na hodnotách v uzlech v předchozím časovém kroku následovně

$$C(i,j) = d(i,j) \times [p^u(i,j)C(i+1,u) + p^m(i,j)C(i+1,m) + p^d(i,j)C(i+1,d)], \quad (48)$$

kde $C(i+1,u), C(i+1,m)$ a $C(i+1,d)$ jsou hodnoty opce v časovém kroku $(i+1)$, které se větví z uzlu (i,j) s pravděpodobnostmi $p^u(i,j), p^m(i,j)$ a $p^d(i,j)$. Hodnotu evropské opce call o splatnosti T (platí, že $T \leq s$ (s je splatnost dluhopisu), $T = N_T\Delta t$ a $s = N_s\Delta t$) získáme tak, že nejprve určíme hodnotu $C(i,j)$ v koncových uzlech

$$C(N_T, j) = \max[0, P_s(N_T, j) - K], \quad (49)$$

pro $\forall j$ v N_T a pak opakovaně dosazujeme do rovnice (48) až určíme hodnotu v počátečním uzlu. Pokud využijeme definice AD cen (viz implementace HW modelu v appendixu B), lze určit hodnotu call opce také následovně

$$C(0,0) = \sum_j Q(N_T, j) \max[0, P_s(N_T, j) - K], \quad (50)$$

pro $\forall j$ v N_T. Pro opci put platí analogické vztahy, pouze člen $\max[0, P_s(N_T, j) - K]$ je nahrazen členem $\max[0, K - P_s(N_T, j)]$. Při zohlednění konvence počítání dní se člen Δt upraví podle dané konvence.

Put call parita

Mezi opcemi cap a floor existuje také vzajemný vztah - put call parita:

hodnota opce cap = hodnota opce floor + hodnota swapu

V tomto vztahu mají opce cap a floor stejnou uplatňovací cenu K. Swap zde představuje kontrakt, kdy přijímáme pohyblivou sazbu, např. EURIBOR a platíme pevnou sazbu K. Všechny tři nástroje mají stejnou splatnost a frekvenci plateb. Potom pro EURIBOR$> K$ nám dlouhá pozice cap opce poskytuje hotovostní tok EURIBOR $-K$. Pro EURIBOR$< K$ nám krátká pozice v opci floor poskytuje výplatu $-(K-$EURIBOR$)$ =EURIBOR $-K$. To je přesně hotovostní tok odpovídající swapu. Odtud plyne, že pokud odečteme od hodnoty opce cap hodnotu opce floor, dostaneme hodnotu swapu.

Ocenění swapce pomocí BS modelu

Následující postup na ocenění swapce pomocí BS uvádí HULL(2003). BS model na ocenění evropské opce na swap předpokládá, že v době splatnosti opce vykazuje swapová míra logaritmicko normální rozdělení. Předpokládejme kupní swapci, kdy máme právo platit míru s_K a přijímat pohyblivou míru ve swapu, který trvá n roků se začátkem v roce T. Dále předpokládáme m plateb za rok a jmenovitou hodnotu L. Prozatím neuvažujme vliv konvence počítání dní. Potom pevná platba swapu je pevná sazba krát $\frac{L}{m}$. Pevnou swapovou sazbu pro n-letý swap se začátkem v roce T označme s_T. Pomocí hotovostního toku z pevné swapové sazby s_T a s_K získáme výplatu swapce, která se skládá z posloupnosti plateb

$$\frac{L}{m}\max(s_T - s_K, 0). \tag{51}$$

Tyto platby jsou vypláceny m krát za rok po dobu swapového období. Nechť $T_1, T_2, ..., T_{mn}$ jsou data swapových plateb v letech. Potom výplata call opce s uplatňovací cenou s_K v čase T_i je

$$\frac{L}{m}P(0, T_i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)], \tag{52}$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{s_0}{s_K}) + \sigma^2 \frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

s_0 je forwardová swapová míra v čase 0[11] a σ její rozptyl. Celková hodnota swapce je

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i)[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]. \tag{54}$$

Což lze přepsat jako

[11] Mějme swap s počátkem v čase T s daty plateb $T_1, T_2, ..., T_N$, $T_0 = T$. Předpokládejme, že jmenovitá hodnota swapu je € 1. Předpokládejme, že forwardová swapová míra (tj. úroková míra, při které je hodnota pevné části swapu rovna pohyblivé) je v čase t ($t \leq T$) rovna $s(t)$. Hodnota pevné části swapu je (bez závěrečné výměny jmenovité hodnoty swapu, která je v praxi pouze pomyslná)

$$s(t)A(t),$$

kde

$$A(t) = \sum_{i=0}^{N-1} (T_{i+1} - T_i) P(t, T_{i+1}).$$

Jak bylo zmíněno dříve, pohyblivá část swapu je rovna jmenovité hodnotě, v tomto případě € 1. V čase T_0 je hodnota € 1 rovno $P(t, T_0)$. Abychom dostali hodnotu pohyblivé části swapu, musíme odečíst ještě pomyslnou závěrečnou výměnu jmenovité hodnoty, která je rovna $P(t, T_N)$. Pak dostaneme

$$P(t, T_0) - P(t, T_N)$$

Protože pohyblivá část swapu se rovná pevné, dostaneme odtud vztah pro výpočet forwardové swapové sazby

$$s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{A(t)}. \tag{53}$$

$$LA[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)],$$

kde

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i).$$

Pokud vezmeme v úvahu některou konvenci počítání dní, tak potom

$$A = \sum_{i=1}^{mn} a_i P(0, T_i),$$

kde a_i je akruální faktor závislý na použité konvenci (počet dní mezi T_{i-1} a T_i).

Ocenění swapce pomocí HW modelu

Swap můžeme nahlížet jako kontrakt, kdy směňujeme dluhopis s pevným kuponem za dluhopis s proměnlivým. Při uzavření swapu je pohyblivá část swapu rovna nominální hodnotě, takže swapci můžeme nahlížet jako opci na výměnu dluhopisu s pevným kuponem za jmenovitou hodnotu swapu. Kupní swapce je potom put opce na dluhopis s pevným kuponem s uplatňovací cenou rovnou jmenovité hodnotě. Prodejní swapce je pak call opce. Tohoto faktu lze využít při oceňování v HW modelu. Vzhledem k tomu, že je možné swapci považovat za opci na dluhopis, je situace analogická ocenění opce typu floor či cap. Rozdíl je v tom, že zde není podkladový dluhopis bezkuponový, takže musíme brát v potaz také kupon v datech plateb.

Zachovejme značení jako v případě ocenění opce cap a floor a pouze hodnotu dluhopisu v uzlu (i, j) označme jako $B(i, j)$ (opět ale předpokládáme dluhopis s jednotkovou jmenovitou hodnotou). Nejprve vytvoříme strom úrokových měr do data splatnosti swapu. V konečných uzlech (čas N_s) potom určíme hodnotu dluhopisu jako

$$B(N_s, j) = 1 + \text{kupon}. \qquad (55)$$

Zpětnou indukcí potom určíme hodnotu dluhopisu podle vztahu (30) v časových uzlech, kde nedochází k výplatě kuponu a podle vztahu (56)

$$B(i,j) = d(i,j)\times[p^u(i,j)B(i+1,u)+p^m(i,j)B(i+1,m)+p^d(i,j)B(i+1,d)+\text{kupon}] \quad (56)$$

v uzlech s výplatou. Konečná hodnota swapce se potom vypočte analogicky jako u opce cap a floor. Pomocí AD cen je to (CLEWLOW(1998))

$$\text{kupní swapce} = \sum_j Q(N_T,j)\max[0, 1 - B(N_T,j)], \quad (57)$$

$$\text{prodejní swapce} = \sum_j Q(N_T,j)\max[0, B(N_T,j) - 1]. \quad (58)$$

V praxi se však výše uvedené produkty pomocí HW neoceňují. Opce cap, floor a evropské swapce se oceňují BS modelem a jejich ocenění potom slouží ke kalibraci HW modelu a následné ocenění produktů, které už nelze pomocí BS ocenit[12]. Jedná se hlavně o americké a bermudské opce. HW model je však limitován tím, že obsahuje pouze jeden faktor a neumožňuje flexibilnější modelování výnosové křivky, což může mít u exotičtějších derivátů (např. bariérové opce) za následek ztrátu přesnosti. To vyžaduje potom při použití HW modelu jeho úpravy (viz HULL,WHITE(1996)) nebo se použije jiný model.

Příklad ocenění americké opce typu cap pomocí HW modelu

Americká opce se od evropské liší tím, že je uplatnitelná kdykoli během života opce. Jak již bylo napsáno, úroková opce typu cap může být také formulována jako portfolio put

[12]Ceny opcí jsou kotovány jako volatility (z kterých se při kalibraci dopočítá cena). Protože jsou počítány na základě BS modelu, předpokládá se u nich logaritmicko normální rozdělení úrokových měr. HW model je však postaven na předpokladu normálního rozdělení. Obvykle se kotují nástroje, které jsou „at-the-money", ale při strmější výnosové křivce to není možné zaručit. Podle REBONATO(1996) pak ovšem dochází kvůli předpokladům v distribučních rozděleních k chybným odhadům parametrů α a σ.

opcí na bezkupónový dluhopis (portfolio capletů). Označme $P(i,j)$ hodnotu této jedné evropské put opce (capletu), který spočteme podle vztahu (obdoba vztahu (48) pro call opci)

$$P(i,j) = d(i,j) \times [p^u(i,j)P(i+1,u) + p^m(i,j)P(i+1,m) + p^d(i,j)P(i+1,d)]. \quad (59)$$

Hodnotu ameriké put opce $P(i,j)_{am}$ v počátečním uzlu potom spočteme zpětnou indukcí ze vztahu

$$P(i,j)_{am} = \max[K - P_s(i,j), P(i,j)], \quad (60)$$

kde K je uplatňovací cena a $P_s(i,j)$ získáme ze vztahu (30).

4.4 Regulérnost ocenění

K ověření hypotézy, zda banky oceňují úrokové deriváty jejich skutečnou hodnotou (je možné se setkat s názorem, že ocenění je vždy výhodnější pro banku), byl stanoven následující postup:

1) Analýza nabídky úrokových derivátů v bankách.

2) Analýza oceňovacích modelů.

3) Provedení srovnávacího ocenění.

Ad 1) Této části se věnovala detailně kapitola 2 a 3 této práce. Kvůli závěrečnému srovnávacímu ocenění bylo třeba zjistit strukturu produktů a zda je možná nějaká klasifikace. Bylo zjištěno, že neexistuje standardizovaný ceník produktů ani pevná nabídka, přesto je možné vysledovat v nabídce bank dvě základní skupiny produktů, které jsem označil jako

a) Základní.

b) Specifické.

Skupina a) představuje vlastně „standardizované“ produkty v tom smyslu, že se jedná o produkty, jejichž struktura je obecně známá, existuje k nim např. i mezinárodně používaná obchodní dokumentace (např. ISDA) a jsou v nabídce všech bank (parametry se ovšem přizpůsobí konkrétním potřebám klienta). Jsou to ony dříve označené „stavební kameny“. Jedná se o FRA, klasické swapy, klasické opce (evropské, americké, bermudské cap, floor, collar) a swapce. Podle EDWARDS(1995) to jsou obecně nejčastěji obchodované produkty.

Skupinou b) označuji konstrukčně složitější produkty (exotické deriváty) nebo individuální obchodní strategie složené z produktů skupiny a). Od skupiny a) se liší svojí specifičností v konstrukci i v míře, v jaké jsou „šité na míru“ klientovi (což se může odrazit i v konkrétních obchodních podmínkách).

Ad 2) Oceňovací modely analyzovala detailně kapitola 4 se zaměřením na modely BS a HW (podle REBONATO(1996),CLEWLOW(1998) i podle dotazníkového zjištění se jedná o nejpoužívanější oceňovací modely pro skupinu produktů Ad 1) a), které jsou nejobchodovanější). Hlavním závěrem relevantním pro další analýzu je zjištění, že pouze u základních produktů existuje obecná shoda ve způsobu ocenění, zatímco u složitějších tomu tak není. To je komplikace, protože v případě rozdílnosti ocenění nelze potom přesně určit příčinu této rozdílnosti. Možné příčiny rozdílnosti mohou být potom následující:

- Přirážka za nelikviditu - Cena nástroje, který není příliš často obchodován na OTC trhu (např. jednotlivý caplet), může obsahovat zvláštní přirážku.
- Možnost použití různých modelů pro ocenění daného nástroje.
- Jiné hodnoty parametrů a a σ v HW modelu - jejich hodnoty záleží na přijatých předpokladech a na způsobu provedení kalibrace.
- Rozdílný časový krok při konstrukci úrokového stromu.

- Interpolace výnosové křivky použitá v HW modelu - nejčastěji používaná lineární nebo kubická interpolace odporuje bezarbitrážnímu předpokladu.

- Omezení jednofaktorového HW modelu - model, který je použit v této práci neumožňuje flexibilnější modelování výnosové křivky.

- Banky skutečně oceňují ve svůj prospěch.

Čili není možné z rozdílnosti ocenění vyvodit jednoznačný závěr o tom, zda banka oceňuje skutečnou hodnotou či ne.

Ad 3) Zde se předpokládalo vytvoření reprezentativních testovacích nástrojů, které by se nechaly ocenit bankami a pak by se srovnaly s mým oceněním, u něhož bych předpokládal, že je regulérní (příklad takového ocenění je v následující kapitole 4.5). Ovšem vzhledem ke skutečnostem uvedeným v Ad 2) by získané výsledky nebyly dostatečně průkazné. Domnívám se však, že zjištění popsaná v této práci jsou dostatečná k tomu, aby mohla být hypotéza potvrzena či zamítnuta.

Trh na straně nabídky obsahuje následující tržní struktury (BESANKO(2004)):

- Monopol - tržní struktura s jediným subjektem na straně nabídky, s jediným dodavatelem daného statku, k němuž neexistují blízké substituty. Nemusí brát v úvahu ostatní firmy při tvorbě ceny.

- Oligopol - tržní struktura na straně nabídky, která je charakteristická existencí malého počtu firem v odvětví, přičemž alespoň některé firmy mohou ovlivňovat celkovou cenu odvětví, musí brát v úvahu ostatní firmy.

- Dokonalá konkurence - existuje velký počet firem a žádná z nich nemá dominantní postavení a není tedy schopna ovlivnit cenu nebo nabízené množství. Cena je určena „trhem“.

- Monopolistická konkurence - modelový typ tržní struktury s velkým počtem firem (nabízejících) vyrábějících diferencovaný produkt, jednotlivé produkty jsou navzájem blízkými substituty.

Struktura	HI	Velikost tržní konkurence
dokonalá konkurence	obvykle $< 0,2$	velká
monopolistická konkurence	obvykle $< 0,2$	záleží na stupni diferenciace produktu
oligopol	$0,2 - 0,6$	záleží na vzájemné rivalitě firem
monopol	$> 0,6$	malá dokud nehrozí vstup do odvětví

Tab. 2: Zdroj BESANKO(2004)

Jedním z ukazatelů, kterým se snažíme určit typ tržní struktury je Herfindahlův index (HI). [13] Vztah mezi Herfindahlovým indexem a tržní strukturou je v tab. 2.

To by znamenalo s ohledem na data z obr. 1, že tržní struktura derivátů v bankovním sektoru odpovídá prvním dvěma kategoriím. Je ale vidět, že HI má roustoucí trend (zvyšuje se tržní koncentrace) a proto v další analýze není vyloučena ani možnost oligopolní struktury. Pro analýzu bylo zachováno rozdělení trhu produktů z bodu Ad 1) a využita zjištění bodu Ad 2).

Charakteristika segmentu základních produktů:

- Podobné produkty v nabídce všech bank (není patrná výrazná diferenciace).
- Dostatečně jednotné oceňovací modely.
- Dealeři bank si ověřují cenu u jiných tržních protistran.
- Zákazník si může pomocí telefonu porovnat ceny u různých bank.
- Existence třetích stran, pomocí nichž si může zákazník produkt nezávisle ocenit (viz již zmiňovaná společnost SuperDerivatives Inc. (<http://www.superderivatives.com>)[14], na který jsem byl upozorněn jednou z bank).

Uvedená charakteristika podporuje tvrzení, že v tomto segmentu převládá tržní struktura blízká dokonalé konkurenci.

[13] Mějme N firem a tržní podíl firmy i je s_i. Potom Herfindahlův index je definován $H = \sum_{i=1}^{N}(s_i)^2$

[14] Tato společnost zvítězila v květnu 2006 v New Yorku v kategorii Best Customer Service Organization soutěže International Business Awards

Tato charakteristika však v daném rozsahu neplatí pro segment specifických produktů a proto lze připustit možnost vzniku oligopolní struktury. Podle BESANKO(2004) je však obtížné udržovat oligopolní struktury na trhu, kde jsou charakteristiky produktu přizpůsobené individuálnímu zákazníkovi. Pokud je produkt „šitý na míru", může mít firma snahu zvýšit svůj podíl na trhu tím, že ke svému produktu přidá různé zvýhodňovací dodatky (dodatečné služby apod.), které jsou samozřejmě hůř sledovatelné konkurencí než pouhá cena (která v tomto případě díky různorodosti v oceňování také není jednoznačná). To vede v konečném důsledku k tomu, že na trhu s takovými podmínkami panuje silná vzájemná konkurence. Je o to silnější, že díky EU roste konkurence bank i mezinárodně. Konkurence je dále umocněna ještě tím, že tajné, případně složité transakce snáze způsobí chybnou interpretaci obchodního tahu - např. snížením ceny se konkurence může cítit ohrožena, přičemž při znalosti všech obchodních podmínek by se ukázalo, že celkově ke snížení ceny nedošlo. Čímž je ukázáno, že na trhu úrokových derivátů v bankovním sektoru existují předpoklady pro to, že nemůže docházet k trvalému vědomému oceňování produktů ve prospěch bank (pokud tomu tedy z nějakého důvodu nechce sám klient) a banky tedy oceňují deriváty pravou hodnotou.

Zvyšování tržní koncentrace znamená konsolidaci v sektoru, což lze vnímat nejen podezřívavě kvůli omezení soutěže, ale také pozitivně v tom smyslu, že v případě závazků z derivátových pohledávek se zvyšuje jistota, že je bude banka schopna vyrovnat.

Informace obsažené v této kapitole o oceňování je možné také použít při zkoumání opodstatněnosti názoru (např. JÍLEK(2002)), který tvrdí, že účetní jednotka by měla derivátům, se kterými obchoduje, perfektně rozumět a být schopna si je ocenit sama [15]. Avšak z této práce lze vyvodit, že je to přehnaný požadavek. Každá chyba při konstrukci oceňovacího modelu (výnosovou křivkou počínaje a HW modelem konče), může mít vážné následky a navíc to klade na účetní jednotku vysoké nároky na detailní znalost modelu a jeho implementaci. Jak již bylo zmíněno, na trhu existuje množství oceňovacích pro-

[15] Účetní jednotka musí ze zákona o účetnictví zjistit reálnou hodnotu daného nástroje a protože se pohybujeme na OTC trzích, je relevantní §27 odst.(4) písm.(b) zákona č. 563/1991 Sb. o účetnictví, což v praxi znamená, že účetní jednotka si může vybrat, zda si derivát ocení sama nebo využije služby znalce (specializované firmy).

duktů, které mají navíc tu výhodu, že umožňují ocenit daný nástroj pomocí více modelů. Navíc tato možnost zachovává výhodu samostatného ocenění v tom, že je možno si zvolit předpoklady ocenění (např. o hodnotě volatility v BS modelu).[16] Ovšem samozřejmostí u takové aplikace by měla být dokumentace s použitými matematickými vztahy, nemělo by se jednat o žádnou „černou skříňku“. Další možnost je využít služeb banky, která poskytuje k danému nástroji aktuální ocenění (jak bylo ukázáno, je možné předpokládat, že pravdivé).

4.5 Srovnávací ocenění americké swapce

Tato část ukazuje praktickou ukázku předpokládaného srovnávacího ocenění (viz kapitola Regulérnost ocenění), přičemž bude využit dříve popsaný teoretický aparát.

Oceňovaným derivátem je čtyřletá americká kupní swapce se splatností swapu pět let, tj. platnost opce je 4 roky od počátku kontraktu, během nichž je možno opci uplatnit a vstoupit do swapu, který má splatnost 5 let od počátku kontraktu. Parametry jsou následující:

Měna:	EUR
Jmenovitá hodnota:	10 mil.
Frekvence plateb pevné části swapu:	roční
Referenční sazba:	1Y EURIBOR
Realizační swapová sazba:	4%
Počátek kontraktu:	6.11.2006

Ke konstrukci výnosové křivky a k samotnému ocenění je potřeba si opatřit sazby EURIBOR, swapové sazby a kotace volatilit evropských swapcí (viz tab. 3, 4 a 6). Splatnosti do jednoho roku jsou rovny sazbám EURIBOR a od jednoho roku výše (sazba pro první

[16] Ve středu 3.května 2006 vyšel v novinách „The Wall Street Journal“ článek „Guessing future value of options“, který popisuje značnou možnost amerických společností ovlivnit finanční výsledky právě přijatými předpoklady o hodnotě volatility zaměstnaneckých opcí.

Splatnost:	1W	2W	3W	1M	2M
Sazba:	0,03356	0,03361	0,03362	0,03366	0,03507
Splatnost:	3M	4M	5M	6M	7M
Sazba:	0,03569	0,03619	0,03681	0,03721	0,03755
Splatnost:	8M	9M	10M	11M	12M
Sazba:	0,03786	0,03816	0,03843	0,03861	0,03879

Tab. 3: Kotace EURIBOR z 6.11.2006. Zdroj <http://www.euribor.org>.

Splatnost:	1Y	2Y	4Y	6Y	8Y	10Y
Sazba:	0,03929	0,03944	0,03935	0,03941	0,03967	0,04003

Tab. 4: Swapové sazby z 6.11.2006. Zdroj Bloomberg.

rok byla vypočítána jako průměr sazby 12M EURIBOR a 1Y swapové sazby) se spočítají metodou extrakce (bootstrapping) podle vzorce (62) a (63) (spojité úročení). Interpolace byla použita kubická (numerická implementace ve VBA použita z KRUGER(2006)). Výsledná výnosová křivka je v tab. 5.

Nyní je potřeba provést kalibraci HW modelu (určit parametry a a σ), kterým oceníme daný derivát. Při kalibraci by se měly použít nástroje, které jsou co nejvíce podobné oceňovanému nástroji co do typu i splatnosti a jsou dostatečně obchodované. Protože se oceňuje americká swapce se splatností čtyři roky a splatností swapu pět let, použijí se ke kalibraci evropské swapce splatností 1x4, 2x3, 3x2 a 4x1, čímž se částečně přiblíží realita, že americká opce může být uplatněna kdykoli během čtyř let. Z kotovaných volatilit získáme ceny evropských swapcí a potom minimalizací vztahu (29) získáme parametry a a σ.

K výpočtům jsou použity funkce ve VBA (Visual Basic for Applications), které se nachází na doprovodném CD k HULL(2003) v souboru DG151functions.xls.

Z faktu, že kotované volatility evropských opcí náleží opcím při penězích a že výplata swapce je při vypršení $\max(0, V_{swap})$, kde V_{swap} je hodnota swapu, jehož pevná úroková

Splatnost:	1W	2W	3W	1M	2M	3M
Sazba:	0,03356	0,03361	0,03362	0,03366	0,03507	0,03569
Splatnost:	4M	5M	6M	7M	8M	9M
Sazba:	0,03619	0,03681	0,03721	0,03755	0,03786	0,03816
Splatnost:	10M	11M	1Y	2Y	3Y	4Y
Sazba:	0,03872	0,03859	0,03857	0,03866	0,03878	0,03894
Splatnost:	5Y	6Y	7Y	8Y	9Y	10Y
Sazba:	0,03912	0,03934	0,03843	0,03861	0,03830	0,03869

Tab. 5: Výsledná výnosová křivka.

	Doba trvání swapu			
Splatnost swapce	1	2	3	4
1				15,25%
2			15,95%	
3		16,25%		
4	16,05%			

Tab. 6: Tato tabulka ukazuje střední hodnoty implikovaných volatilit evropských swapcí z 6.11.2006, které jsou při penězích (at-the-money). Zdroj Bloomberg. Splatnost swapce představuje počet let do vypršení swapce. Doba trvání swapu určuje délku trvání swapu v letech, pokud je swapce uplatněna.

míra je rovna realizační sazbě (při vypršení swapce), plyne, že je nutno určit realizační sazbu tak, aby $V_{swap} = 0$ pro datum splatnosti opce. Realizační sazbou je tedy forwardová swapová sazba v čase 0 podle vztahu (53). Implementace tohoto vztahu je ve funkci SwapPrice, pomocí kterého se určí hledaná sazba (tj. sazba, při které se SwapPrice rovná nule). Všechny potřebné vstupní hodnoty k výpočtu jsou známé:

- začátek swapu (v letech) - čas T,
- konec swapu (v letech) - čas T_N,
- frekvence plateb,
- diskontní faktory $P(0, T_i)$, které se určí z výnosové křivky.

Nyní se podle vztahu (52) vypočte hodnota evropské swapce. Tento vztah je implementován ve funkci BlackSwapOpt. Všechny potřebné vstupní hodnoty k výpočtu jsou k dispozici:

- splatnost opce T (v letech),
- délka trvání swapu n,
- frekvence plateb m,
- jmenovitá hodnota L,
- realizační sazba s_K (je spočteno v předchozím kroku),
- volatilita σ (viz tab. 6),
- diskontní faktory $P(0, T_i)$, které se určí z výnosové křivky.

Nyní je možné přistoupit k samotné kalibraci. Konstrukce trinomického stromu HW modelu popsaná v této práci odpovídá HULL(2003), který je také použit ve funkci TreeSwapOpt a kterou je tedy možné použít pro výpočet (implementace vztahu (57)). Všechny potřebné vstupní hodnoty jsou shodné jako pro ocenění BS, jen se nyní hledá hodnota

Vol.	**Typ swapce**	**Splatnost swapce**	**Délka swapu**	**Frekv. plateb**	**Realiz. swap. míra**	**BS (mil.€)**	**HW (mil.€)**	$\left(\frac{HW_i(a,\sigma)-BS_i}{BS_i}\right)^2$
15,25%	kupní	1	4	roční	3,941%	0,083773	0,086498	0,001058
15,95%	kupní	2	3	roční	3,925%	0,090637	0,089555	0,000143
16,25%	kupní	3	2	roční	3,909%	0,073558	0,071961	0,000471
16,05%	kupní	4	1	roční	3,925%	0,041271	0,041248	0,0000003
								$\sqrt{\sum_{i=1}^{M}} = 0,0408871$

Tab. 7: Kalibrace (čísla jsou zaokrouhlena).

a a σ tak, aby výsledné ocenění HW modelem bylo co nejblíže ocenění BS. Jejich hodnoty jsou při minimalizaci vztahu (29) provedené standardním doplňkem Excelu Řešitel $a = 0,173751$ a $\sigma = 0,008849$ (v HULL,WHITE(1996) se uvádí hodnoty pro německou marku v červenci 1994 $a = 0,1$ a $\sigma = 0,01$). Konečný výsledek kalibrace je v tab. 7.

Nyní, když jsou určeny hodnoty a a σ, je možné přistoupit k samotnému ocenění požadované americké swapce. K ocenění se využije poznatek zmíněný v kapitole 4.3.4, že kupní swapce je put opce na dluhopis s pevným kuponem s uplatňovací cenou rovnou jmenovité hodnotě, takže se bude v závislosti na zadání americké swapce oceňovat americká put opce na dluhopis následujících parametrů:

- splatnost dluhopisu 5 let,
- kupon dluhopisu 4% (odpovídá realizační swapové sazbě),
- jmenovitá hodnota 10 mil.€,
- roční frekvence kuponových plateb (odpovídá frekvenci plateb pevné části swapu),
- uplatňovací cena - rovna jmenovité hodnotě,
- platnost opce 4 roky,

- $a = 0,173751$,
- $\sigma = 0,008849$.

Ocenění se provede postupem uvedeným v kapitole 4.3.4, jenž je obsažen ve funkci TreeBondOpt, kterou byla swapce nakonec oceněna. Cena americké swapce uvedených parametrů činí 0,129484 mil.€.

Dalším krokem je ocenění uvedeného derivátu u zvolených bank a srovnání s mým oceněním. Vzhledem k tomu, že tato část nebyla uskutečněna a plně metodicky rozpracována, tak jsem pro tento příklad za účelem srovnání ocenění oslovil pouze jednu banku. Bylo mi sděleno, že uvedený derivát není příliš obchodovaný (je obvyklejší vaianta CMS (Constant Maturity Swap), tj. při uplatnění swapce má swap vždy splatnost zvolené konstantní délky (v případě výše uvedeného derivátu je variabilní v závislosti na datu uplatnění swapce, protože splatnost swapu je pevně dána od počátku platnosti kontraktu 5 let)), ale hlavně, že pro americkou opci je nemožné dojít k nějakému shodnému výsledku - vstupuje tam příliš mnoho proměnných, kde je možné se lišit - volatility, modelování budoucích výnosových křivek, atd., čímž bylo podpořeno moje tvrzení, že srovnávací ocenění by mi neposkytlo dostatečně relevantní informace vzhledem ke zkoumané hypotéze.

5 Závěr

Tato práce se zabývala úrokovými deriváty v nabídce českých bank. V první části práce byl analyzován bankovní sektor a popsány produkty zjištěné od bank. Ukázalo se, že struktura finančních operací (rozvaha, podrozvaha) sleduje celosvětový trend v bankovním sektoru. Zjištěná nabídka obsahuje vedle základních produktů také řadu exotických derivátů s tím, že banky jsou schopny vyhovět prakticky každému požadavku (zprostředkováním na zahraničním trhu). Svojí strukturou a nabídkou lze tedy daný trh považovat za rozvinutý.

Druhá část práce se věnovala oceňování úrokových derivátů. Jedná se o značně různorodou oblast, kdy se nebylo možné vyhnout ani složitým matematickým modelům (detailně byl popsán Hullův-Whiteův model). Kromě popisu a analýzy oceňovacích modelů bylo také cílem zjistit, zda banky oceňují úrokové deriváty regulérně - občas se lze setkat s tvrzením, že banky mají velké zisky z derivátových operací a že je to díky neférovému oceňování. Tato práce ukázala, že tomu tak není. Příčinou velkých zisků může být spíše to, že klienti bank kupují pro sebe nevhodné produkty.

Cílem této práce také bylo podat ucelený detailní popis úrokových derivátů (detailní porozumění je klíčové pro všechny, kteří zvažují, zda se v těchto obchodech angažovat), čemuž byla přizpůsobena celková struktura.

Na úplný závěr bych rád vyjádřil naději, že tato práce dostatečně pojednala problematiku úrokových derivátů v nabídce českých bank a odpověděla na související otázky položené v úvodu práce a že bude užitečným zdrojem informací v této oblasti.

A Konstrukce spotové výnosové křivky

Při konstrukci spotové výnosové křivky hraje důležitou roli cena diskontovaného hotovostního toku v čase $t = 0$ (definovaného výše) $P(0, T)$, který se také někdy označuje jako diskontní faktor. Výnosová křivka se konstruuje pomocí cen nástrojů získaných na trhu dluhopisů nebo trhu peněz. Pokud se konstruuje z dluhopisů, tak se použije jen určitá třída. Pokud se používá trh peněz, tak potom se rozdělí nástroje, z kterých se počítá výnosová křivka, podle toho, která splatnost výnosové křivky se počítá. Tabulka 8 ukazuje nástroje používané pro výpočet výnosové křivky v USA. Tabulka 9 ukazuje nástroje pro EU. Na základě výsledků průzkumu v předchozí části a na základě odborné literatury (např. JÍLEK(2002)), je toto schéma použito pro výpočet výnosové křivky v této práci.

Nástroj	**splatnost**
LIBOR	$t < 3M$
Futurita	$3M \leq t \leq 15M$
Swap	$1Y \leq t \leq 60Y$

Tab. 8: Seznam nástrojů peněžního trhu použitých ke konstrukci výnosové křivky.

Nástroj	**splatnost**
EURIBOR	$t < 1Y$
Swap	$1Y \leq t \leq 60Y$

Tab. 9: Seznam nástrojů peněžního trhu použitých ke konstrukci výnosové křivky.

V obou případech (dluhopisový trh nebo trh peněz) z tržních dat získáme matici $\mathbb{A}$ hotovostních toků, kde každý řádek představuje určitý finanční nástroj a každý sloupec určitý časový okamžik. $\mathbb{A}(i, j)$ tedy představuje částku, kterou vyplatí i-tý nástroj v čase j. Nechť dále $\mathbb{F}$ je vektor současných cen nástroje (takže i-tý nástroj má cenu $\mathbb{F}(i)$). Z definice diskontního faktoru $P(0, j)$ potom plyne, že $\mathbb{F} = \mathbb{A} \times \mathbb{P}$. Vzhledem k tomu, že data mohou obsahovat šum (více výnosů pro podobné nebo stejné splatnosti), případně mohou být řídká (mezi jednotlivými splatnostmi jsou velké mezery), není možné řešit tuto rovnici přesně a daná rovnice má potom tvar

$$\mathbb{F} = \mathbb{A} \times \mathbb{P} + \epsilon \tag{61}$$

kde ϵ je vektor, který má nejmenší možnou velikost. Je zřejmé, že řešením této rovnice získáme hodnoty $P(0,T)$ pro T, jejichž hotovostní toky byly zadány. Existuje více různých numerických postupů, které se snaží spojit jednotlivé výnosy tak, aby následná křivka byla konzistentní, hladká a co nejblíže hodnotám zadaných splatností. Tyto metody se používají jednak pro odhad hodnoty chybějících nástrojů před výpočtem křivky, tak pro určení chybějících splatností výsledné spotové výnosové křivky. Jedná se o různé regresní metody (hlavně tam, kde je šum vstupních dat), interpolační Nelson Siegelovy a Svenssonovy funkce apod. Ovšem tyto techniky mají tu nevýhodu, že tím, aby byla zajištěna hladkost a spojitost, může být snížena jejich informační hodnota pro oceňování (výsledná křivka je příliš vzdálená od spočtených splatností). Proto se používá v praxi hlavně lineární a kubická interpolace, což potvrdila i jedna z odpovědí v dotazníku.

Pokud počítáme výnosovou křivku ze swapové křivky, tak se používá metoda extrakce (bootstrapping) (což bylo dotazníkem potvrzeno také). Pro účely této práce se, s ohledem na doporučení odborné literatury (JÍLEK(2002), REBONATO(1996)) a výsledků dotazníkového průzkumu mezi bankami, ke konstrukci používá pro splatnosti $T < 1$ rok výnosy mezibankovních vkladů (EURIBOR, PRIBOR), které jsou už sami o sobě spotovými úrokovými mírami. Od jednoho roku výše se používá swapová křivka a na ní se provede následně extrakce (bootstrapping). Chybějící splatnosti potřebné pro extrakci se získají pomocí interpolace (HAGAN(2003)). Pro zjištění splatností výsledné spotové výnosové křivky, které nebyly zadány, se použije také některá z interpolačních technik.

Metoda extrakce výnosové křivky (bootstrapping)

Výpočetní metoda je založena na tom, že reálná hodnota kotovaných úrokových swapů (střední hodnoty[17]) je rovna nule, což znamená, že reálná hodnota proměnlivé části swapu

[17]Podle JÍLEK(2002) se obecně doporučuje, aby výpočet reálných hodnot derivátů byl založen na

je rovna pevné části. Dále je možno ukázat (viz HULL(2003)), že proměnlivá část swapu je rovna jmenovité hodnotě. Pokud si zvolíme jmenovitou hodnotu rovnu jedné, zohledníme podmínky klasických swapů (počet pevných úrokových plateb je jedna, viz tab. 10) a jsou k dispozici swapové sazby do n-tého roku (včetně) značené jako $r_i, i = 1, ..., n$, které pokrývají roční periody, potom se diskontní faktor $P(0,T)$, dále značený jako df_i, odvodí následovně (STANDER(2005)):[18]

$$
\begin{aligned}
1 &= (1+\alpha_1 r_1) df_1 \quad df_1 = \frac{1}{1+\alpha_1 r_1} \\
1 &= (r_2\alpha_1) df_1 + (1+\alpha_2 r_2) df_2 \quad df_2 = \frac{1 - r_2(\alpha_1 df_1)}{1+\alpha_2 r_2} \\
1 &= (r_3\alpha_1) df_1 + (r_3\alpha_2) df_2 + (1+\alpha_3 r_3) df_3 \quad df_3 = \frac{1 - r_3(\alpha_1 df_1 + \alpha_2 df_2)}{1+\alpha_3 r_3}
\end{aligned}
$$

a podobně pro další splatnosti. Výsledný vzorec potom je

$$
df_k = \frac{1 - r_k \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j df_j}{1+\alpha_k r_k} \tag{62}
$$

kde $k = 1, ..., n$, df_k je k-letý diskontní faktor $(P(0,k))$ a α_j je přesná délka (počet dnů převedený na roky) mezi jednotlivými roky (záleží na použité konvenci). Spotová úroková míra (spot, zero rate) je potom pro spojité úročení vypočtena podle vztahu

$$
df_k = e^{-R(0,k)k}
$$

jako

středech kotací. Platí to i pro depozitní sazby PRIBOR a PRIBID, EURIBOR a EURIBID. Ovšem kotace EURIBID nejsou obvykle k dispozici, tak se vychází z kotací EURIBOR.

[18]První rovnice zobrazuje skutečnost, že investor dostane po roce zpět investici rovnu jedné plus úrok r_1. Druhá rovnice podobně říká, že investor obdrží každý rok úrok r_2 a při vypršení také nominální hodnotu rovnu jedné. Tato konstrukce odpovídá hodnotě pevné části swapu.

Měna swapu	**Konvence pevné platby**	**Konvence proměnlivé platby**	**Počet pevných plateb za rok**	**Počet proměnlivých plateb za rok**	**Proměnlivá platba**
CZK	act/360	act/360	1	2	6M PRIBOR
EUR	30/360	act/360	1	2	6M EURIBOR
USD	act/360	act/360	1	4	3M USD LIBOR

Tab. 10: Podmínky klasických úrokových swapů. Zdroj (JÍLEK(2002))

$$R(0,k) = -\frac{1}{k} \ln \left[\frac{1 - r_k \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j df_j}{1 + \alpha_k r_k} \right] \tag{63}$$

Pro složené roční úročení je to

$$df_k = \frac{1}{[1 + R(0,k)]^k}$$

a odtud

$$R(0,k) = \left[\frac{1 - r_k \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j df_j}{1 + \alpha_k r_k} \right]^{-\frac{1}{k}} - 1. \tag{64}$$

Obvykle se ale používá vztah pro spojité úročení.

Interpolace

S ohledem k dřívějším zjištěním je v této práci použita kubická interpolace, ale vzhledem k častému použití bude popsána i lineární.

Lineární interpolace

Všechny body daných úrokových měr jsou spojeny úsečkami a tím je zaručena kompletnost křivky. Hodnota bodu, která leží mezi známými hodnotami je určená polohou na úsečce mezi těmito body. Je dána vztahem

$$R(t) = R(t_i) + \left[\frac{(t - t_i)}{(t_{i+1} - t_i)}\right] \times [R(t_{i+1}) - R(t_i)], \qquad (65)$$

kde $R(t)$ představuje bod, pro který chceme zjistit hodnotu v čase t a který se nachází mezi body $R(t_i)$ a $R(t_{i+1})$ a $t_i \leq t \leq t_{i+1}$.

Kubická interpolace (Cubic Spline Interpolation)

Jedná se o využití polynomů. Buď můžeme použít jediný polynom řádu $n - 1$ (n je počet bodů) nebo použít více polynomů řádu nižšího (např. kvadratické, kubické), které se potom spojí. Druhá možnost má tu výhodu, že je možné dodatečně nadefinovat podmínky, které zaručí, že výsledná křivka bude hladká, nebude oscilovat a bude procházet zadanými body. Mějme funkci $R_i(t)$ označující kubický polynom pro $t \in \langle t_i, t_{i+1}\rangle$ (FABOZZI(2002)):

$$R_i(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + r_i, \qquad (66)$$

kde n je počet bodů, r_i představuje zadanou hodnotu úrokové míry v bodě i a t_i představuje splatnost. Máme n bodů, $n - 1$ polynomů a tři koeficienty pro každý polynom. Celkově máme $3n - 3$ neznámých koeficientů. Hodnotu koeficientů na intervalu $\langle t, T\rangle$ vypočteme pomocí omezujících podmínek (FABOZZI(2002)):

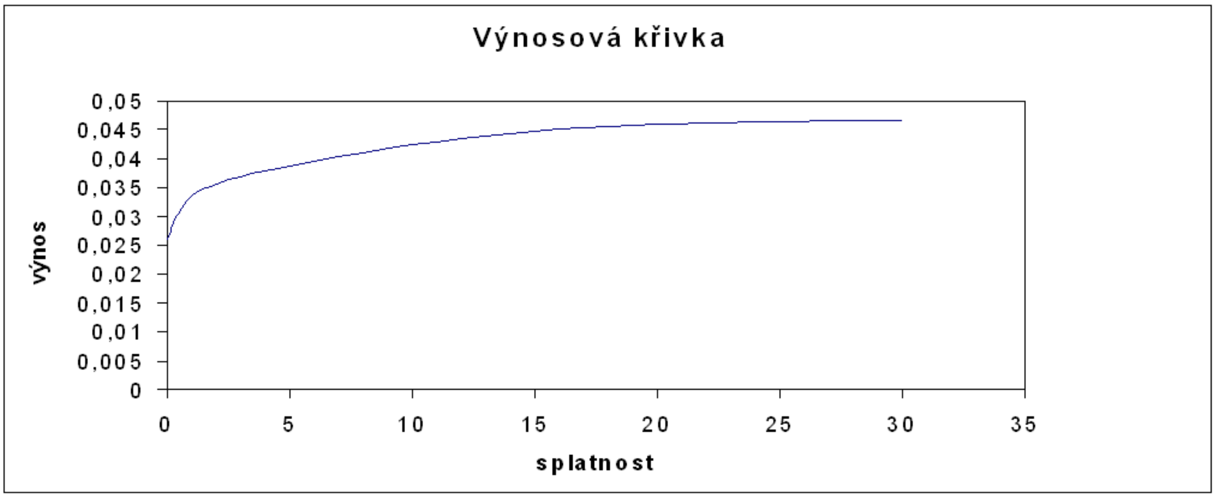
$$a_i(t_{i+1} - t_i)^3 + b_i(t_{i+1} - t_i)^2 + c_i(t_{i+1} - t_i) = r_{i+1} - r_i \qquad (67)$$

$$3a_{i-1}(t_i - t_{i-1})^2 + 2b_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + c_{i-1} - c_i = 0 \qquad (68)$$

$$6a_{i-1}(t_i - t_{i-1}) + 2b_{i-1} - 2b_i = 0 \qquad (69)$$

$$b_1 = 0 \qquad (70)$$

$$6a_{n-1}(t_n - t_{n-1}) + 2b_{n-1} = 0 \qquad (71)$$



Obr. 10: Výnosová eurová křivka získaná metodou extrakcí výnosové křivky za použití kubické interpolace.

Rovnice (67) představuje $n-1$ omezení, která zaručují, že polynomické (spline) funkce na sebe budou přesně navazovat v daných známých bodech. Každá z rovnic (68) a (69) představuje také $n-1$ omezení, která zajišťují, že se rovná první a druhá derivace v bodech, kde na sebe polynomy navazují. Rovnice (70) a (71) představují podmínku, že druhá derivace je v koncových bodech nulová (jedná se o tzv. přirozený spline). Máme tedy systém $3n-3$ lineárních rovnic o $3n-3$ neznámých. Konkrétní numerická implementace byla pro potřeby této práce převzata z KRUGER(2006). Příklad výnosové křivky vypočtené podle uvedeného postupu lze vidět na obr. 10.

B Numerická implementace HW modelu

HW trinomický úrokový strom představuje diskrétní verzi HW modelu daného rovnicí (22), kde se modeluje okamžitá úroková míra r v časových krocích Δt. Na konci každého časového kroku se hodnota r určí jako $r_0 + k\Delta r$, kde k je kladné nebo záporné celé číslo a r_0 je počáteční hodnota r. Konstrukce stromu má dvě fáze dané rovnicí (25), kdy nejprve namodelujeme počáteční strom (diskrétní verze procesu (26)), který potom upravíme tak, aby byl konzistentní s aktuální výnosovou křivkou.

Nejprve předpokládejme, že časový krok je konstantní a rovný Δt. Potom předpokládáme, že úroková míra pro období Δt, označme ji R, se řídí stejným procesem jako r v rovnici (22), takže přepsáno v novém značení

$$dR(t) = [\Theta(t) - aR]dt + \sigma dw. \tag{72}$$

Pokud $\Theta(t) = 0$, máme zde diskrétní verzi (26)

$$dX(t) = -aX(t)dt + \sigma dw, \tag{73}$$

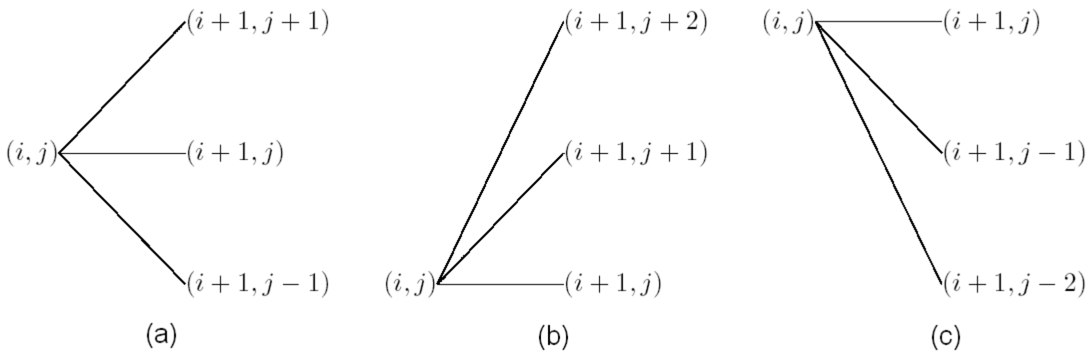
kde počáteční hodnota $X_0 = 0$. Proces pro X má normální rozdělení. Střední hodnota $E[\Delta X]$ je potom $-aX\Delta t$ a rozptyl je $\sigma^2 \Delta t$. ΔX představuje interval mezi dvěma uzly stromu ve stejném časovém bodě, který HULL,WHITE(2000) definovali jako

$$\Delta X = \sigma\sqrt{\rho\Delta t}, \tag{74}$$

kdy pro $\rho = 3$ je minimalizována chyba při oceňování derivátů použitím tohoto stromu.

Každý uzel tohoto stromu představuje různé hodnoty X a uzel (i, j) představuje v čase $i\Delta t$ hodnotu $X = j\Delta X$. Při konstrukci stromu se používají tři typy větvení, viz obr. 11.

Ve všech třech případech p^u, p^m a p^d budou vždy označovat pravděpodobnosti pohybu k hornímu, prostřednímu nebo dolnímu uzlu. Pro různé úrovně úrokové míry se bude lišit typ větvení a také pravděpodobnosti. Toto větvení se děje kvůli „mean-reverting“ charakteru modelu, protože nám umožňuje vyhnout se oblastem úrokových měr, které mají nízkou pravděpodobnost výskytu. Pokud je j dostatečně záporné, potom se větví podle obr. 11 (b). Při normálních hodnotách se řídí případem (a) a pokud je j dostatečně kladné, potom se bude strom větvit podle (c).



Obr. 11: Typy větvení (GRECO(2006)).

Pravděpodobnosti musí splňovat určité podmínky. Musí být nezáporné a dále se požaduje, aby odpovídaly prvním dvou momentům veličiny X (pro $\Delta t \to 0$). Platí, že (HULL,WHITE(2000))

$$p^u + p^m + p^d = 1. \tag{75}$$

Dále víme, že $E[\Delta X] = -aX\Delta t$ a že $X = j\Delta X$. Potom střední hodnota X v dalším časovém kroku činí (HULL,WHITE(2000))

$$E[X] = j\Delta X - aj\Delta X\Delta t. \tag{76}$$

Dále můžeme tuto střední hodnotu také rozepsat následovně:

$$E[X] = p^u((k+1)\Delta X) + p^m(k\Delta X) + p^d((k-1)\Delta X), \tag{77}$$

kdy po dosazení za $k = j-1, j, j+1$ podle toho, zda se jedná o typ větvení (c), (a) nebo (b) a kombinaci rovnic (76), (77) a (75), dostaneme

$$p^u\Delta X - p^d\Delta X = -aj\Delta X\Delta t. \tag{78}$$

Dále víme, že rozptyl $Var(\Delta X) = \sigma^2 \Delta t = [\Delta X - E(\Delta X)]^2$, což po rozepsání

$$Var(\Delta X) = [\Delta X - E(\Delta X)]^2 = [X - E(X)]^2 = Var(X), \tag{79}$$

takže můžeme psát (GRECO(2006))

$$\begin{aligned} Var(X) = \sigma^2 \Delta t = \; & p^u[(k+1)\Delta X - (j\Delta X - aj\Delta X\Delta t)]^2 \\ & +p^m[k\Delta X - (j\Delta X - aj\Delta X\Delta t)]^2 \\ & +p^d[(k-1)\Delta X - (j\Delta X - aj\Delta X\Delta t)]^2, \end{aligned} \tag{80}$$

což opět po dosazení za $k = j-1, j, j+1$ podle typu větvení dostaneme (spolu s (75))

$$p^u \Delta X^2 + p^d \Delta X^2 = \sigma^2 \Delta t + a^2 j^2 \Delta x^2 \Delta t^2. \tag{81}$$

Ze soustavy tří rovnic (75)(78)(81) a vztahu (74) získáme podle GRECO(2006) řešení pro větvení typu (a)

$$\begin{aligned} p^u = \; & \tfrac{1}{2\rho} + \tfrac{1}{2} aj\Delta t(aj\Delta t - 1), \\ p^m = \; & \tfrac{\rho - 1}{\rho} - (aj\Delta t)^2 \\ p^d = \; & \tfrac{1}{2\rho} + \tfrac{1}{2} aj\Delta t(aj\Delta t + 1). \end{aligned} \tag{82}$$

Pro větvení typu (b)

$$\begin{aligned} p^u = \; & \tfrac{1}{2\rho} + \tfrac{1}{2} aj\Delta t(aj\Delta t + 1), \\ p^m = \; & -\tfrac{1}{\rho} - aj\Delta t(aj\Delta t + 2) \\ p^d = \; & \tfrac{2\rho+1}{2\rho} + \tfrac{1}{2} aj\Delta t(aj\Delta t + 3). \end{aligned} \tag{83}$$

A pro větvení typu (c)

$$
\begin{aligned}
p^u = &\quad \tfrac{2\rho+1}{2\rho} + \tfrac{1}{2}aj\Delta t(aj\Delta t - 3), \\
p^m = &\quad -\tfrac{1}{\rho} - aj\Delta t(aj\Delta t - 2) \\
p^d = &\quad \tfrac{1}{2\rho} + \tfrac{1}{2}aj\Delta t(aj\Delta t - 1).
\end{aligned} \tag{84}
$$

Odtud plyne, že pravděpodobnosti jsou v případě větvení typu (a) kladné na intervalu

$$
-\frac{1}{a\Delta t}\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}} < j < \frac{1}{a\Delta t}\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}, \tag{85}
$$

v případě větvení typu (b) na intervalu

$$
\frac{-1-\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} < j < \frac{-1+\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} \tag{86}
$$

a pro větvení typu (c) na intervalu

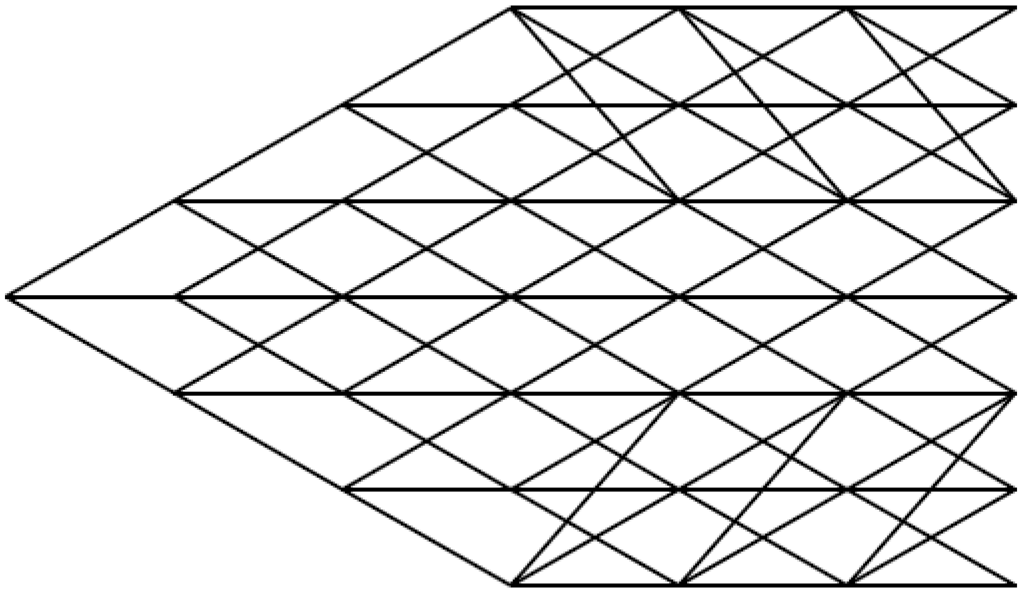
$$
\frac{1-\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} < j < \frac{1+\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t}. \tag{87}
$$

Z nerovností (85),(86) a (87) potom vidíme, že změna typu větvení může nastat kdekoli na intervalu (GRECO(2006))

$$
\frac{1-\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}}{a\Delta t} < |j| < \frac{1}{a\Delta t}\sqrt{\frac{\rho-1}{\rho}}, \tag{88}
$$

kdy změnu větvení provedeme pro co nejnižší možné $j_{max} = |j|$ (urychlí se tím konvergence). Po dosazení $\rho = 3$ dostaneme

$$
\frac{0,1835}{a\Delta t} < |j| < \frac{0,8165}{a\Delta t}. \tag{89}
$$



Obr. 12: Trinomický strom v první fázi ($\Theta(t) = 0$ a $X(0) = 0$)(HULL,WHITE(1996)).

j_{max} je tedy roven nejmenšímu možnému celému číslu, které je větší než $\frac{0{,}1835}{a\Delta t}$. Typ větvení a pravděpodobnosti závisí jenom na j a takto konstruovaný strom je symetrický, tj. $j_{max} = -j_{min}$. Příklad takového stromu pro $j_{max} = 3$ viz obr. 12.

Nyní přichází na řadu druhá fáze konstrukce trinomického stromu, při které je nutné posunout uzly stromu z první fáze tak, aby uzly odpovídaly příslušným úrokovým měrám - je požadována konzistence s aktuální výnosovou křivkou, tj. aby strom přesně ocenil dluhopisy s nulovými kupony. V této chvíli by teoreticky stačilo dosadit do rovnice (28), jenže to by výsledné míry byly pouze přibližné, protože se nesmí zapomínat na to, že trinomický strom představuje pouze diskrétní verzi procesu (26). Z toho důvodu je lepší použít iterativní postup (navržený v HULL,WHITE(1996)), který určí úrokové míry tak, aby přesně odpovídaly výnosové křivce.

V souladu s rovnicí (25) (v diskrétním tvaru)

$$R_{i,j} = \alpha_i + X_{i,j} \tag{90}$$

hledáme faktory α_i, které nám zaručí přesnou kalibraci na výnosovou křivku. Proto definujeme (HULL,WHITE(2000)):

- $X_{i,j}$: hodnota úrokové míry X v uzlu (i, j), $X = j\Delta X$,
- $R_{i,j}$: hodnota úrokové míry R v uzlu (i, j),
- $p(i, j|h, k)$: pravděpodobnost přechodu z uzlu (h, k) do uzlu (i, j),
- $Q(i, j|h, k)$: hodnota cenného papíru v uzlu (h, k), který vyplatí 1€ v uzlu (i, j) a 0€ v každém jiném uzlu,
- $Q_{i,j}$:$Q(i, j|0, 0)$.

pro $\forall\ i \geq 0$, $0 \leq h < i$, $|j| \leq \min\{j_{max}, i\}$, $|k| \leq \min\{j_{max}, h\}$. Veličina $Q(i, j|h, k)$ se také někdy nazývá Arrow-Debreu (AD) cena a proměnná $Q_{i,j}$ kořenová AD cena. Kořenovou AD cenu pro uzel (i, j) je možné spočítat pouze pokud známe kořenové AD ceny pro všechny uzly v čase $(i - 1)\Delta t$, viz (HULL,WHITE(2000))

$$Q(i, j|i - 1, k) = p(i, j|i - 1, k)e^{-R_{i-1,k}\Delta t} \tag{91}$$

a

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &= \textstyle\sum_k Q(i, j|i - 1, k)Q_{i-1,k} \\ &= \textstyle\sum_k p(i, j|i - 1, k)e^{-R_{i-1,k}\Delta t}Q_{i-1,k}, \end{aligned} \tag{92}$$

kde suma prochází přes všechny uzly v čase $(i - 1)\Delta t$ (samozřejmě jen přes uzly k, u kterých je pravděpodobnost přechodu kladná). Na kořenové AD ceny se můžeme dívat jako na diskontované pravděpodobnosti.

Nechť dále máme dluhopis se splatností v čase $(i + 1)\Delta t$, který vyplatí 1€ v každém uzlu časového kroku $(i + 1)$. Nechť $V_{i,j}$ je hodnota tohoto dluhopisu v uzlu (i, j). Postup pro určení faktoru α_i pro časový krok i zahrnuje dva stupně. Nejprve se určí $Q_{i,j}$ pro každý uzel v časovém kroku i. Potom se s využitím těchto kořenových AD cen určí současná hodnota daného dluhopisu. Protože

$$
\begin{aligned}
V_{i,j} &= e^{-R_{i,j}\Delta t} \\
&= e^{-(\alpha_i + X_{i,j})\Delta t},
\end{aligned}
\tag{93}
$$

je současná hodnota rovna (SAN-LIN(2001))

$$
\begin{aligned}
P(0,(i+1)\Delta t) &= \textstyle\sum_j Q_{i,j} V_{i,j} \\
&= \textstyle\sum_j Q_{i,j} e^{-(\alpha_i + X_{i,j})\Delta t},
\end{aligned}
\tag{94}
$$

odkud lehce vyjádříme α_i[19]

$$
\alpha_i = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(P(0,(i+1)\Delta t)^{-1} \sum_j Q_{i,j} e^{-j\Delta X \Delta t} \right). \tag{95}
$$

Implementace tohoto dvoustupňového procesu konstrukce stromu je tedy následující. Hodnota cenného papíru vyplácejícího 1€ v kořenovém uzlu je z definice 1€ ($Q_{0,0} = 1$). Na základě hodnoty $Q_{0,0} = 1$ vypočteme ze vztahu (95) hodnotu α_0, která odpovídá ceně dluhopisu podle aktuální výnosové křivky v čase Δt. To nám umožní použít rovnici (92) k výpočtu $Q_{1,j}$ pro každý uzel (GRECO(2006))

$$Q_{1,1} = p(1,1|0,0)P(0,\Delta t)$$

$$Q_{1,0} = p(1,0|0,0)P(0,\Delta t)$$

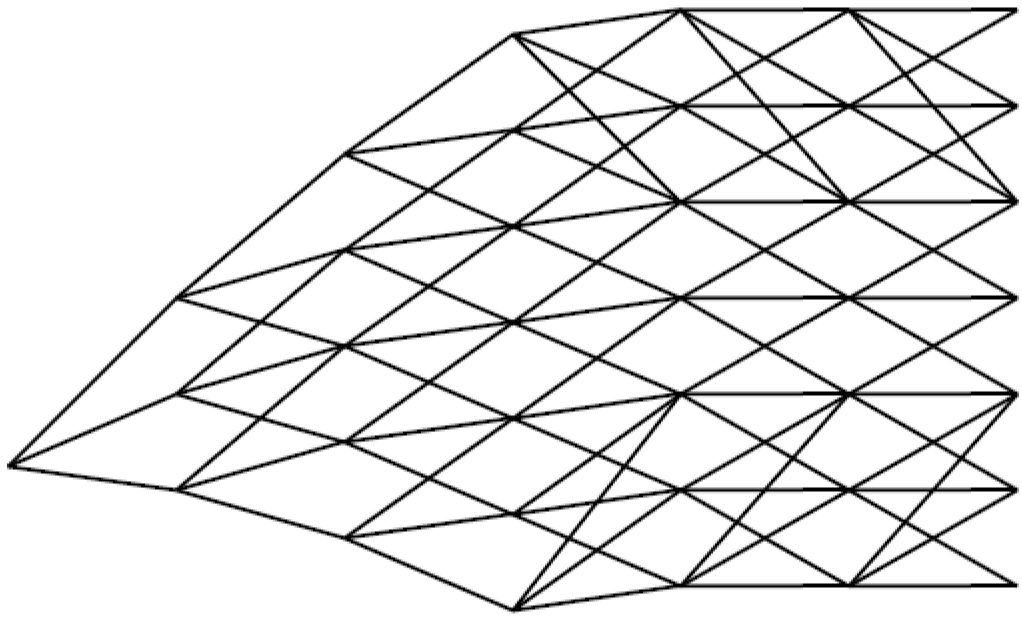
$$Q_{1,-1} = p(1,-1|0,0)P(0,\Delta t)$$[20]

To nám zase umožní použít rovnici (95) k výpočtu α_1 a tak se pokračuje dál až se určí $R_{i,j}$ ve všech uzlech. Výsledný strom může potom vypadat jako na obr. 13.

Předchozí postup předpokládal konstantní časový krok Δt. Takovýto strom je vhodný na ocenění např. dluhopisu, opce typu cap, floor či collar. Složitější úrokové deriváty však

[19] $P(0,(i+1)\Delta t)$ určíme z aktuální výnosové křivky

[20] $p(1,1|0,0)$ je vlastně p^u, $p(1,0|0,0)$ je p^m, $p(1,-1|0,0)$ je p^d



Obr. 13: Konečný trinomický strom (HULL,WHITE(1996)).

vyžadují někdy jiné postupy pro konstrukci trinomického úrokového stromu. Příkladem může být někdy potřebná změna časového kroku Δt tak, že není konstantní. Pokud chceme ocenit např. opci na swap (swapci), tak je vhodné při konstrukci stromu zohlednit data jednotlivých plateb a datum uplatnění opce, aby se přesně kryly s uzly stromu. Konstrukce má opět dvě fáze, přičemž první fáze se liší od stromu s konstantním krokem v jiném způsobem větvení, zatímco druhá fáze je shodná. Proces se řídí opět rovnicemi (72) a (73).

Podrobný postup uvádí HULL,WHITE(2000). Mějme strom o n krocích s uzly v čase $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$, kde $t_0 = 0$,$t_i > t_{i-1}$ a $t_n = T$. T vybereme tak, aby se za tímto datem neobjevila už žádná platba oceňovaného nástroje. Dále by čas t_i měl odpovídat datu plateb, případně můžeme zvolit větší počet t_i pro zvýšení rozlišení stromu. Jakmile jsme umístili časové uzly, tak musíme určit rozsah hodnot X v těchto uzlech. Každý časový krok obsahuje hodnotu $X = 0$. V každém časovém kroku $t_i (i = 1, ..., n)$ potom máme hodnoty $\pm\Delta X_i$, $\pm 2\Delta X_i$, ..., $\pm m_i \Delta X_i$ (jedná se o obdobu vztahu $X = j\Delta X$). Výpočet m_i bude vysvětlen dále. ΔX_i musíme vybrat tak, aby dostatečně odrážel rozptyl proměnné X. Platí obdobný vztah jako (74)

$$\Delta X_i = \sigma\sqrt{\rho(t_i - t_{i-1})}, \tag{96}$$

kde opět $\rho = 3$. V dalším kroku se musí určit, jak budou uzly stromu navzájem spojeny, čímž také určíme hodnotu m_i, index nejnižšího a nejvyššího uzlu v daném časovém kroku.

Větvení stromu se snaží samozřejmě co nejvěrněji sledovat difúzní proces (72). Předpokládejme, že jsme v uzlu (i, j) (časový krok i, pozice j, hodnota $X = j\Delta X_i$) a v dalším časovém kroku $(i+1)$ chceme přejít do uzlů $(k-1), k, (k+1)$ o hodnotách $(k-1)\Delta X_{i+1}$, $k\Delta X_{i+1}$ a $(k+1)\Delta X_{i+1}$. Opět platí, že p^u, p^m a p^d budou označovat pravděpodobnosti pohybu k hornímu, prostřednímu nebo dolnímu uzlu a že musí být nezáporné a dále se požaduje, aby odpovídaly prvním dvou momentům veličiny X (pro $\Delta t \to 0$). Opět platí rovnice (75)

$$p^u + p^m + p^d = 1.$$

Dále víme, že $E[\Delta X_i] = -aX(t_{i+1} - t_i)$ a že $X = j\Delta X_i$, potom platí obdoba vztahu (76)

$$E[X] = j\Delta X_i - aj\Delta X_i(t_{i+1} - t_i) \tag{97}$$

a dále platí obdoba vztahu (77)

$$E[X] = p^u((k+1)\Delta X_{i+1}) + p^m(k\Delta X_{i+1}) + p^d((k-1)\Delta X_{i+1}), \tag{98}$$

z čehož dostaneme

$$j\Delta X_i - aj\Delta X_i(t_{i+1} - t_i) = k\Delta X_{i+1} + (p^u - p^d)\Delta X_{x+1}. \tag{99}$$

Dále víme, že rozptyl $Var(\Delta X) = \sigma^2(t_{i+1} - t_i)$ a že $Var(\Delta X) = Var(X) = E[X^2] - E[X]^2$. Platí

$$E[X^2] = p^u((k+1)\Delta X_{i+1})^2 + p^m(k\Delta X_{i+1})^2 + p^d((k-1)\Delta X_{i+1})^2. \tag{100}$$

Po dosazení a rozepsání do rovnice $Var(X) + E[X]^2 = E[X^2]$ dostáváme

$$\begin{aligned} Var(X) + (j\Delta X_i - aj\Delta X_i(t_{i+1} - t_i))^2 = \\ = k^2\Delta X_{i+1}^2 + 2k(p^u - p^d)\Delta X_{i+1}^2 + (p^u + p^d)\Delta X_{i+1}^2. \end{aligned} \tag{101}$$

Řešením soustavy rovnic (76), (99) a (101) dostáváme (HULL,WHITE(2000))

$$\begin{aligned} p^u &= \tfrac{Var(X)}{2\Delta X_{i+1}^2} + \tfrac{\beta^2+\beta}{2}, \\ p^m &= 1 - \tfrac{Var(X)}{\Delta X_{i+1}^2} - \beta^2, \\ p^d &= \tfrac{Var(X)}{2\Delta X_{i+1}^2} + \tfrac{\beta^2-\beta}{2}, \end{aligned} \tag{102}$$

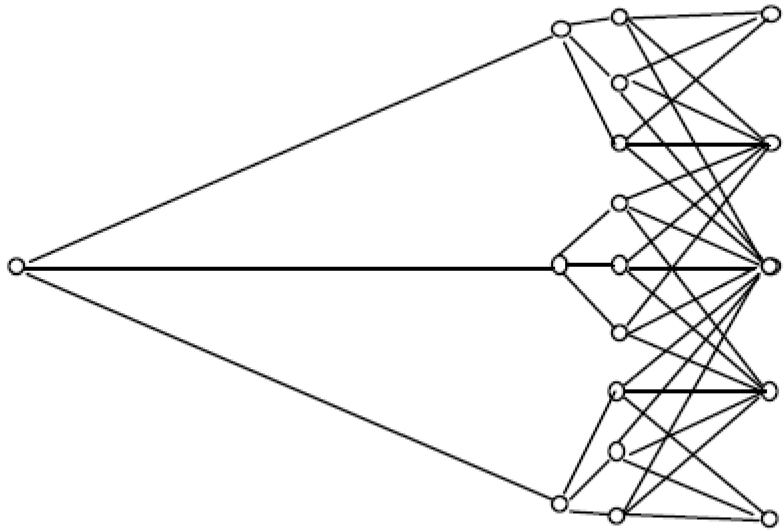
kde

$$\beta = \frac{j\Delta X_i - aj\Delta X_i(t_{i+1} - t_i) - k\Delta X_{i+1}}{\Delta X_{i+1}} \tag{103}$$

můžeme chápat jako vzdálenost střední hodnoty X a prostředního uzlu následujícího kroku. Dosazením za $Var(X) = \sigma^2(t_{i+1} - t_i)$ a $\Delta X_i = \sigma\sqrt{\rho(t_i - t_{i-1})}$ lze odvodit, že pravděpodobnosti jsou kladné, pokud

$$-\sqrt{\frac{2}{3}} < \beta < \sqrt{\frac{2}{3}}. \tag{104}$$

Je více možností, jak zvolit k, ale obvykle se podle HULL,WHITE(2000) volí tak, aby výsledná hodnota byla co nejblíže střední hodnotě $E[X]$, tj. k je rovno



Obr. 14: Trinomický strom s proměnným časovým krokem (HULL,WHITE(2000)).

$$\frac{j\Delta X_i - aj\Delta X_i(t_{i+1} - t_i)}{\Delta X_{i+1}}$$

zaokrouhlené na nejbližší celé číslo, čímž je splněna podmínka (104). Tímto je také určen největší a nejmenší uzel v každém kroku. Největší uzel v kroku $(i + 1)$, m_{i+1}, je určen větvením z největšího uzlu v čase i, m_i. Zrcadlově podobně pro nejmenší uzel $-m_{i+1}$. Protože v kroku 0 je jen jediný uzel $m_0 = 0$, lehce určíme největší a nejmenší uzly v následujících krocích. Příklad stromu s proměnným časovým krokem po první fázi je na obr. 14. Druhá fáze je potom shodná jako u stromu s konstantním časovým krokem.

Použité zdroje

[1] BAXTER, M., RENNIE, A. *Financial calculus: an introduction to derivative pricing.* Cambridge University Press, 1996.

[2] BAZ, J., CHACKO, G. *Financial Derivatives. Pricing, Applications And Mathematics.* Cambridge University Press, 2004.

[3] BESANKO, D., DRANOVE, D., SHANLEY, M., SCHAEFER, S. *Economics of Strategy.* Wiley & Sons, 2004.

[4] CLEWLOW, L., STRICKLAND, C. *Implementing Derivatives Models.* Wiley, 1998.

[5] COOK, Timothy Q., LAROCHE, Robert K. *Instruments of the Money Market.* Federal Reserve Bank of Richmond, 1993.
Dostupné z <http://www.richmondfed.org/publications/economic_research/instruments_of_the_money_market/>.

[6] ČNB. *Bankovní dohled,* 2005.
Dostupné z <http://www.cnb.cz/cz/dohled_fin_trh/bankovni_dohled/bankovni_sektor/analyticke_pub/download/bd_2005_c.pdf>.

[7] ČNB. *Bankovní dohled,* 2004.
Dostupné z <http://www.cnb.cz/cz/dohled_fin_trh/bankovni_dohled/bankovni_sektor/analyticke_pub/download/bd_2004_c.pdf>.

[8] ČNB. *Bankovní dohled,* 2003.
Dostupné z <http://www.cnb.cz/cz/dohled_fin_trh/bankovni_dohled/bankovni_sektor/analyticke_pub/download/bd_2003_c.pdf>.

[9] ČS a.s. *Produkty úrokového zajištění pro korporátní klientelu pro Českou Asociaci Treasury,* 2005.

[10] ČSOB a.s. *Výroční zpráva,* 2004.
Dostupné z <http://www.csob.cz/data/pb/pdf/CSOB_VZ_2004.pdf>.

[11] ČSOB a.s. *Nástroje sloužící k zajištění rizika pohybu úrokových měr,* 2003.

[12] DAS, S. *Risk management and financial derivatives: a guide to the mathematics.* Macmillan, 1997.

[13] DĚDEK, O. *Studijní texty k předmětu Nástroje finančních trhů I., II.* IES FSV UK, 2004.

[14] EDWARDS R., MISHKIN F. *The Decline of Traditional Banking: Implications for Financial Stability and Regulatory Policy.* FRBNY Economic Policy Review, 1995.

[15] FABOZZI, F. J. *Interest rate, term structure, and valuation modeling.* Wiley & Sons, 2002.

[16] GRECO, J. *Hull-White Trees.* The University of Chicago, 2006.
Dostupné z <http://www.math.uchicago.edu/ ldoloc/>.

[17] HAGAN, P., WEST G. *Interpolation methods for curve construction,* 2003
Dostupné z <http://www.finmod.co.za/interpolation.pdf>.

[18] HULL, J. C. *Options, Futures, And Other Derivatives.* Prentice Hall, 2003.

[19] HULL, J., WHITE, A. *The General Hull-White Model and Super Calibration,* 2000.
Dostupné z <http://www.stern.nyu.edu/fin/workpapers/papers00/wpa00024.pdf>.

[20] HULL, J., WHITE, A. *Using Hull-White Interest-Rate Trees.* Journal of Derivatives, 1996.
Dostupné z <http://www.smartquant.com/references/TermStructure/term3.pdf>.

[21] JÍLEK, J. *Finanční a komoditní deriváty v praxi.* Grada Publishing, 2005.

[22] JÍLEK, J. *Finanční a komoditní deriváty.* Grada Publishing, 2002.

[23] KB a.s. *Podnikatelé a menší firmy - Vše, co KB nabízí,* 2006.
Dostupné z <http://www.kb.cz/cs/seg/seg3/all_offers.shtml>.

[24] KOHN, R. *Continuous Time Finance.* New York University, 2004.
Dostupné z <http://www.math.nyu.edu/faculty/kohn/cont-time-finance.html>.

[25] KRUGER, C. *Constrained Cubic Spline Interpolation,* 2006.
Dostupné z <http://www.korf.co.uk/util_2.html>.

[26] LEE, H. *Interest Rate Risk - Models: Similarities and differences,* Risk Magazine, 2000.
Dostupné z <http://www.financewise.com/public/edit/riskm/interestrate/interestraterisk00-models.htm>.

[27] LONGSTAFF, F., SANTA-CLARA P., SCHWARTZ E. *Throwing away a billion dollars: the cost of suboptimal exercise strategies in the swaptions market.* Journal of Financial Economics, 2001.
Dostupné z <http://personal.anderson.ucla.edu/pedro.santa-clara/AmericanSwaptionJFE.pdf>.

[28] NEKULA, K. *Finanční opce.* Diplomová práce na IES FSV UK. Vedoucí práce Doc. Ing. Miloslav Vošvrda CSc., 2004.

[29] REBONATO, R. *Interest-rate option models : understaning, analysing and using models for exotic interest-rate options.* Wiley & Sons, 1996.

[30] RITCHKEN, P. *Derivative markets: theory, strategy, and applications.* Harper Collins College Publishers, 1996.

[31] SAN-LIN Chung, LI-CHENG Cheng. *Valuing Cross-Currency Interest Rate Derivatives.* National Central University Taiwan, 2001.
Dostupné z <http://thesis.lib.ncu.edu.tw/ETD-db/ETD-search-c/getfile?urn=88425023&filename=88425023.pdf>.

[32] SCHINASI, Garry J. *Modern banking and OTC derivatives markets.* International Monetary Fund, 2000.

[33] SEN, Saurav. *Interest Rate Options.* University od Oxford, 2001.
Dostupné z <http://www.stats.ox.ac.uk/ sen/iroptions.pdf>.

[34] STANDER, Y. S. *Yield curve modeling.* Palgrave Macmillan, 2005.

[35] TEASDALE, A. *Learning Curve. Forward Rate Agreements.* YieldCurve.com, 2004. Dostupné z <http://www.yieldcurve.com/Mktresearch/LearningCurve/FRAs.pdf>.

[36] VLK, K. *Trh finančních derivátů v České republice.* Diplomová práce na IES FSV UK. Vedoucí práce doc. Ing. Oldřich Dědek CSc., 2004.

[37] Vyhláška č. 500/2002 Sb. § *52 Oceňovací rozdíly při uplatnění reálné hodnoty u zajišťovacích derivátů (K § 4 odst. 8 zákona),* novelizace 2006.

[38] Zákon č. 563/1991 Sb. o účetnictví. *Způsoby oceňování.*

[39] <http://www.bloomberg.org>

[40] <http://www.cnb.cz>

[41] <http://www.csas.cz>

[42] <http://www.csob.cz>

[43] <http://www.euribor.org>

[44] <http://www.fincad.com>

[45] <http://www.hvb.cz>

[46] <http://www.kb.cz>

[47] <http://www.rotman.utoronto.ca/ hull/software/>

[48] <http://www.superderivatives.com>

Resumé

This thesis is aimed at interest rate derivatives offered by Czech banks. At the beginning basic definitions and terms are defined. The interest rate derivative is defined as a financial instrument where the interest rate instrument is its underlying asset which is denominated in a single currency and its payoff is dependent on future interest rate development.

Second part analyzes Czech bank sector and describes questionnaire research made on selected sample of the largest Czech banks, namely Česká spořitelna, a.s., Československá obchodní banka, a.s., HVB Bank Czech Republic a.s. and Komerční banka, a.s. The findings stemming from this research were crucial for subsequent parts of the paper, for products description and pricing models.

Third chapter describes the identified products. The FRA, swaps and options are mainly characterized. Range of the offer serves as an indicator of the interest rate derivative market development and it has been concluded, that the market can be regarded as developed.

Last chapter analyzes pricing models and tries to verify a hypothesis, whether the banks price the derivatives products at fair value. The yield curve, Black - Scholes and Hull - White models are depicted in detail. Despite of the impossibility to carry out the comparative pricing (because of diversity in pricing models) it was shown, that the banks price the interest rate derivatives at true fair value. The paper meets its goals to answer the set hypothesis and provides detailed description of the interest rate derivatives.