Univerzita Karlova v Praze, Fakulta sociálních věd
Institut ekonomických studií

Bakalářská práce

Solowův model hospodářského růstu

Autor: Kateřina Voňková

Vedoucí práce: RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.

Praha, květen 2005

Čestné prohlášení: Prohlašuji, že jsem práci vypracovala samostatně s použitím uvedených pramenů a literatury.

21. května 2005 Kateřina Voňková

Poděkování: Ráda bych poděkovala svému vedoucímu práce RNDr. Miroslavu Zelenému, Ph.D. za veškerou pomoc, které se mi od něho dostalo. Také bych ráda poděkovala svým kolegům za pomoc při nakreslení obrázků a rodičům za trpělivost se mnou během sepisování práce.

Obsah

Úvod

Robert M. Solow

Robert Merton Solow (1924) studoval sociologii, antropologii a ekonomii na Harvardově univerzitě. Od roku 1951 je profesorem (v současné době již emeritním) na Massachusetts Institute of Technology, kde nejprve vyučoval statistiku a ekonometrii a později makroekonomii. V letech 1960-1961 působil v Radě ekonomických poradců prezidenta J.F.Kennedyho. V roce 1987 obdržel Nobelovu cenu za ekonomii zdůvodněnou jeho výzkumy v oblasti teorie a měření ekonomického růstu.

Hlavní práce: „Povaha a zdroje nezaměstnanosti v USA“ (Nature and Sourses of Unemployment in the USA, 1964), „Teorie kapitálu a výnosová míra“ (Capital Theory and the Rate of Return, 1965), „Očekávání vývoje cen a chování cenové hladiny“ (Price Expectations and the Behavior of the Price Level, 1968), „Teorie růstu“ (Growth Theory: An Exposition, 1969).[1]

Hospodářský růst

Zlepšování (růst) životního standardu obyvatelstva země je základním cílem ekonomického vývoje. V krátkém období se životní standard zlepšuje, přechází-li ekonomika z fáze recese do fáze expanze nebo žije-li "na dluh" (tzn. spotřebovává zboží, na které si vypůjčuje od ostatních zemí). Nárůst zahraničního dluhu však implikuje nutnost jeho splácení včetně úroků v budoucnosti, což zase snižuje budoucí životní standard.

[1] Odstavec věnovaný R.M.Solowovi byl převzat z knihy R.Holmana: Dějiny ekonomického myšlení, C.H.Beck, Praha 2001

V dlouhém období (tzn. s trvalejší působností) se však může zvyšovat životní standard pouze růstem potenciálního produktu. Analýzou dlouhodobého růstu se právě zabývá Solowův model. Růst životního standardu nezávisí na celkovém objemu potenciálního produktu, ale na růstu potenciálního produktu na obyvatele. Podmínkou růstu životního standardu tedy je, že **potenciální produkt roste rychleji než obyvatelstvo.**

Změny struktury potřeb spolu s technickým pokrokem mají za následek, že některá odvětví expandují, a jiná naopak upadají. Vznikají tak strukturální změny (náklady těchto změn nesou vždy určité skupiny obyvatel), které jsou snáze řešitelné v rostoucí ekonomice. Můžeme tedy říci, že růst potenciálního produktu na obyvatele zvyšuje i flexibilitu ekonomiky pokud jde o provádění strukturálních změn.

K rozvoji teorií růstu přispěla celá řada ekonomů. Z klasiků to byli T. R. Malthus, A. Smith a D. Ricardo, dále např. J. Schumpeter. Základy moderní teorie růstu - jejich keynesiánskou větev - vytvořili R. F. Harrod (1939), E. D. Domar(1944) a M. Kalecki(1939). Později to byli hlavně Ch. W. Cobb, P. H. Douglas, J. E. Meade, R. M. Solow, J. Tobin, R. Lucas a další.

Cíl této práce a jeho realizace

Na základě svého ekonomického modelu Solow odvodil diferenciální rovnici, jejíž řešením je předpis pro časovou závislost kapitálu K vztaženého na jednotku efektivní práce AL, t.j. $k = k(t)$, kde $k = K/AL$, pro různou volbou počáteční hodnoty funkce k. Cílem této práce je matematický rozbor vlastností řešení této autonomní diferenciální rovnice $dk/dt = F(k)$ pro různé počáteční podmínky $k(0)$ a ekonomická interpretace získaných výsledků. V prvé kapitole *Solowův model růstu* je popsáno odvození Solowova modelu. V druhé kapitole *Matematická část*, která je rozsahem největší a tvoří jádro této práce, je proveden matematický rozbor výše uvedené diferenciální rovnice. Podrobný popis rozsahu tohoto rozboru je uveden v úvodní části druhé kapitoly. A konečně třetí kapitola *Ekonomická část* obsahuje ekonomické závěry některých výsledků získaných v předchozí kapitole, především vliv míry úspor na dlouhodobý ekonomický růst a rychlost konvergence ekonomických veličin ke stacionárním hodnotám.

Kapitola 1

Solowův model růstu

Solowův model ekonomického růstu je založen na bázi agregátní produkční funkce. Vychází se z Cobb-Douglasovy produkční funkce, která vyjadřuje funkční závislost růstu národního produktu na růstu práce a na růstu kapitálu. Tato produkční funkce má následující tvar:

$$Y = A_0 L^{\alpha} K^{\beta}$$

$$\alpha + \beta = 1$$

Parametr A_0 vystihuje působení dalších faktorů, které nejsou ve funkci přímo vyjádřeny (parametr je v obecném případě funkcí času). Symbol α je koeficient elasticity produkce vzhledem k práci, který udává o kolik procent se změní produkt, když se kapitál změní o 1 procento, jsou-li ostatní faktory konstantní. Symbol β je obdobně koeficient elasticity produkce vzhledem ke kapitálu.

Solowovým přínosem je doplnění Cobb-Douglasovy produkční funkce o třetí růstový faktor - technický pokrok, který uvažuje jako exponenciální funkci času, t.j. $A_0 = A_1 \exp(rt)$. Tím obdržel modifikovanou verzi Cobb-Douglasovy produkční funkce:

$$Y(t) = A_1 e^{rt} L^{\alpha}(t) K^{\beta}(t).$$

Model koncentruje pozornost na způsob, jak úspory utvářejí zdroje, které pak jsou použity pro tvorbu kapitálu (akumulaci kapitálu). Akumulace kapitálu pak vede k vyššímu ekonomickému růstu a k růstu životního standardu.

Solowův model byl v neokeynesiánské ekonomii používán také jako model rozdělování. Agregátní produkční funkce naznačovala rozdělení národního produktu mezi mzdy a zisky v duchu teorie mezní produktivity (klíčové zde byly koeficienty α a β).

1.1 Předpoklady Solowova modelu

Solowův model má 3 nezávisle proměnné: kapitál K, práci L a technický pokrok A. Tyto určují velikost závisle proměnné - produktu Y. Produkční funkce má obecně tvar:

$$Y(t) = H(K(t), A(t)L(t))\,,.$$

kde druhou proměnnou je součin AL. Solow patří k předním americkým neokeynesiáncům. Podle neokeynesiánců se ekonomika v dlouhém období chová podle neoklasického modelu (nepružnosti na trzích připouštějí pouze v krátkém období - netýká se Solowova modelu). Solowův model růstu je tedy založen na standardních neoklasických předpokladech a několika málo dalších předpokladech:

1.1.1 Standardní neoklasické předpoklady

1) V ekonomice existuje **dokonalá konkurence**, t.j. trh práce a trh kapitálu se automaticky vyčišťují, firmy maximalizují zisk a mzdy jsou pružné. **Marginální produkt práce** determinuje reálnou mzdu a **marginální produkt kapitálu** determinuje míru výnosnosti kapitálu.
2) Existuje **dokonalá substituce mezi prací a kapitálem**, neboli změna výrobních technik reagující na změny relativních cen práce a kapitálu. Například v ekonomice, která by trpěla nadměrným sklonem k úsporám v porovnání s růstem práceschopného obyvatelstva, by cena kapitálu relativně klesala a cena práce relativně rostla, což by motivovalo výrobce k používání kapitálově náročnějších výrobních technik.
3) Existují **konstantní výnosy z rozsahu.** Tzn. zvýší-li se resp. sníží-li se současně objem kapitálu i objem práce γ-krát (při neměnné úrovni

technologie), zvýší se resp. sníží se i celkový produkt γ-krát:

$$\gamma Y = H(\gamma K,\gamma AL) \qquad \gamma > 0\,.$$

Zvýšení (snížení) rozsahu vyúsťuje v ekviproporcionální zvýšení (snížení) produkce. Produkční funkce je tedy homogenní funkce prvního stupně.

4) Koeficient pracovní participace je neměnný, tzn., že **tempo růstu obyvatelstva** je shodné s **tempem růstu pracovních sil** (vstupu práce).
5) Předpokládáme **uzavřenou ekonomiku.** Tento předpokled se projeví pouze v tom, že v modelu není přítomna složka „čistý export“, tedy celkový export minus celkový import.

1.1.2 Další předpoklady

1) Konečný produkt Y **nezávisí na času t přímo**, ale pouze nepřímo skrze K, L a A. Tedy pokud by se veličiny K, L a A v čase neměnily, neměnil by se v čase ani konečný produkt Y.
2) **Technologický pokrok** je **„práci-rozšiřující“**, tzn. technologický pokrok zvyšuje pouze účinnost (produktivitu) práce, na účinnost kapitálu nemá žádný vliv – v reálném světě asi ovlivňuje pozitivně obojí. Matematicky vyjádřeno vstupují veličiny A a L vždy multiplikativně (v násobku). Násobek AL můžeme nazvat **„efektivní prací“**.
3) Všechny ostatní vstupy kromě kapitálu K, pracovní síly L a technického pokroku A jsou zanedbány. Tzn. model **zanedbává půdu a ostatní přírodní zdroje**. Bez tohoto předpokladu bychom nemohli předpokládat konstantní výnosy z rozsahu (rozsahem se myslí pouze objem kapitálu a práce), tedy vztah $\gamma Y = H(\gamma K,\gamma AL)$. Kdybychom totiž předpokládali, že přírodní zdroje jsou důležité, pak zdvojnásobení objemu kapitálu i práce by méně než zdvojnásobilo objem celkového produktu.
4) Předpoklad konstantních výnosů z rozsahu nám dovoluje "vytýkat" před závorku a zapsat tak produkční funkci $Y(t) = H(K,AL)$ do jejího **intenzivního tvaru**. K produkční funkci v intenzivním tvaru se pak

budou vztahovat další naše předpoklady. Položme $\gamma = \frac{1}{AL}$, pak platí

$$\frac{1}{AL}Y = H(\frac{1}{AL}K,\frac{1}{AL}AL)$$
$$\frac{Y}{AL} = H(\frac{K}{AL},1) \tag{1.1}$$

Veličina $\frac{K}{AL}$ je množství kapitálu na jednotku efektivní práce a veličina $\frac{Y}{AL}$ je produkt na jednotku efektivní práce. Označme si tyto dvě veličiny jako $k = \frac{K}{AL}$ a $y = \frac{Y}{AL}$. Pak platí $H(\frac{K}{AL},1) = H(k,1)$. Z produkční funkce jsme obdrželi funkci o jedné proměnné a můžeme tedy označit $f(k) = H(k,1)$. Pak můžeme přepsat (1.1) jako

$$y = f(k) \tag{1.2}$$

Tímto jsme zapsali produkt na jednotku efektivní práce jako funkci pouze jedné proměnné − kapitálu na jednotku efektivní práce.
Předpoklady vztahující se k intenzivní formě produkční funkce jsou tyto

$$f(0) = 0 \tag{1.3}$$
$$f'(k) > 0, \qquad k > 0 \tag{1.4}$$
$$f''(k) < 0, \qquad k > 0 \tag{1.5}$$
$$\lim_{k \to 0+} f'(k) >> 1 \tag{1.6}$$
$$\lim_{k \to \infty} f'(k) = 0 \tag{1.7}$$

První předpoklad odpovídá skutečnosti, že nulový kapitál na jednotku práce vytváří nulový produkt na jednotku práce. Druhý a třetí předpoklad říkají, že marginální produkt kapitálu je kladný, ale s kapitálem klesá. Platí totiž následující

$$\frac{dH(K,AL)}{dK} = \frac{d[ALf(k)]}{dK} = ALf'(k)\frac{dk}{dK} = f'(k) \tag{1.8}$$

Čtvrtý předpoklad vyjadřuje skutečnost, že marginální produkt kapitálu je hodně veliký, je-li kapitál hodně malý. Někteří autoři předpokládají, že hodnota limity ve vztahu (1.6) je rovna nekonečnu (tzv. první Inadova podmínka). Podmínka (1.6) bude podrobněji diskutována v Matematické části. A konečně poslední předpoklad říká, že marginální produkt kapitálu je naopak velmi malý pro velké hodnoty kapitálu.

5) Potřebujeme nyní zavést termín ***míra růstu***(anglicky rate of growth) veličiny X. Jde o proporcionální změnu veličiny X v čase a je definována jako $\dot{X}(t)/X(t)$.[1] Při čtení ekonomického textu je nutno bedlivě rozlišovat mezi pojmy *míra růstu* a *míra změny* (anglicky rate of change), kde druhý pojem označuje pouze časovou derivaci $\dot{X}(t)$. Mluvíme-li o konstantní míře růstu, máme na mysli

$$\dot{X}(t)/X(t) = c, \qquad c \in \mathbf{R} \tag{1.9}$$

což je autonomní diferenciální rovnice, která má řešení

$$X(t) = c_1 \exp(ct), \qquad c_1 \in \mathbf{R}. \tag{1.10}$$

Je-li míra růstu veličiny X konstantní, pak veličina X roste exponencielně v čase (v textu rozlišujeme výroky „roste“ a „roste mírou“) Zbývající předpoklady se týkají veličin A, L a K, konkrétně toho, jak se mění v čase. Práce a technologický pokrok rostou konstantní mírou

$$\dot{L}(t) = nL(t), \tag{1.11}$$

$$\dot{A}(t) = nA(t). \tag{1.12}$$

Tyto dvě rovnice jsou autonomní diferenciální rovnice. Konstanty n a g jsou exogenně dané. Řešeními výše uvedených diferenciálních rovnic jsou[2]

$$L(t) = c_1 \exp(nt), \qquad c_1 \in \mathbf{R} \tag{1.13}$$

$$A(t) = c_2 \exp(gt), \qquad c_2 \in \mathbf{R} \tag{1.14}$$

Počáteční hodnoty kapitálu, práce a technologického pokroku známe. Do rovnic (1.11) a (1.12) vstupují tyto hodnoty jako počáteční podmínky $L(0)$ a $A(0)$. Jejich dosazením dostaneme

$$L(t) = L(0) \exp(nt), \tag{1.15}$$

$$A(t) = A(0) \exp(gt). \tag{1.16}$$

Předpokladem Solowova tedy je, že L i A rostou exponencielně.

[1] viz druhý dodatek 2. kapitoly, která se věnuje základním vlastnostem míry růstu
[2] obecné řešení autonomních diferenciálních rovnic je popsáno v prvním dodatku 2. kapitoly

Produkt Y je rozdělen mezi spotřebu cY a investice sY, kde $c = 1 - s$. Míra úspor $s, 0 < s < 1$, je exogenně daná konstanta. Jedna uspořená (investovaná jednotka) produktu vytváří jednotku nového kapitálu. Navíc se kapitál znehodnocuje mírou δ. Zapíšeme jako

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t). \tag{1.17}$$

Veličiny n, g a δ mohou nabývat jakýchkoliv hodnot, jen musí být v součtu kladné, t.j.

$$\beta > 0 \qquad \beta = n + g + \delta \tag{1.18}$$

Tímto jsou popsány všechny předpoklady Solowova modelu.
Ve třetí kapitole *Ekonomická část* bude ukázáno, že rovnici (1.17) lze přepsat do tvaru

$$\dot{k}(t) = sf(k) - \beta k\,. \tag{1.19}$$

Kapitola 2

Matematická část

V této kapitole se zabýváme matematickým rozborem Solowova modelu. Pro snazší přechod k aplikační části budeme už od počátku užívat označení Solowova modelu (např. závisle proměnná je značena jako k atp.) Většina poznatků, na které se bez důkazu odvoláváme, je převzata ze skript autorů Johna, Kalendy a Zeleného, Matematika (pokračování), Matfyzpress 2003. Budeme pro tento odkaz používat zkrácený název *Skripta*.

Z matematického hlediska se jedná o rozbor kvalitativních i kvantitativních vlastností maximálních řešení diferenciální rovnice

$$\dot{k} = F(k)\,, \tag{2.1}$$

kde $\dot{k}$ je zkrácený zápis pro derivaci podle času dk/dt. Uvažovaná diferenciální rovnice je autonomní, neboť nezávisle proměnná t nevystupuje explicitně na pravé straně. Budeme předpokládat, že funkce $F : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ má spojitou první derivaci v celém intervalu I.[1] Definice pojmu řešení a maximální řešení je převzata ze *Skript* str. 92 a 93. V případě Solowova modelu je $I = (0, \infty)$.

V první sekci nazvané *Stabilita stacionárního řešení* jsou uvedeny základní definice a tvrzení, které budeme potřebovat v dalších sekcích. Především je uvedena podmínka asymptotické stability stacionárního bodu.

[1]Předpoklad o $F \in C^1(I)$ je převzat z dále citovaných vět. Při praktické aplikaci na Solowův model však není hladkost funkce $F(k)$ nijak omezena a lze považovat $F \in C^\infty(I)$ Definice $C^n(I)$ je ve *Skriptech* str. 10

Poté následuje druhá sekce *Podmínky existence maximálních řešení na* $\boldsymbol{R}$. Úvahy, zda pro studovaný model jsou maximální řešení definována na celém $\mathbf{R}$ či nikoliv, mají praktický smysl. My začínáme studovat vlastnosti systému v čase $t = 0$ a logicky se ptáme, jak se systém vyvíjel či choval v minulosti, t.j. pro $t < 0$. Pokud je maximální řešení definováno v celém $\mathbf{R}$, pak se jedná o přirozený vývoj, jehož důsledkem je současná situace. Pokud je však maximální řešení definováno pouze v intervalu $(T, \infty), T < 0$, pak v čase $t = T$ došlo k nějakému impulzu zvenčí, který zapříčinil vývoj vedoucí k dnešnímu stavu. Proto je v této práci věnována pozornost problematice stanovení definičního oboru maximálních řešení. V této sekci jsou uvedená eventuálně dokázáná tvrzení obsahující podmínky, kdy maximální řešení je definované na celém $\mathbf{R}$. Uvedené poznatky jsou aplikovány v následující sekci.

V třetí sekci s názvem *Matematické vlastnosti Solowova modelu* jsou uvedeny a diskutovány vlastnosti funkce $F(k)$. Je ukázáno, že Solowův model má pouze jeden stacionární bod, který je asymptoticky stabilním stacionárním bodem, přičemž pro model A jsou maximální řešení definována na celém $\mathbf{R}$.

Čtvrtá sekce *Řešení jednoduchých Solowových modelů* obsahuje řešení pěti jednoduchých diferenciálních rovnic splňujících předpoklady Solowova modelu. Tato sekce má dva cíle. Zaprvé ukázat, že i „malé“ porušení předpokladů Solowova modelu může vést k tomu, že maximální řešení není definováno na celém $\mathbf{R}$. Za druhé ukázat, že pro reálný Solowův model, t.j. pro ekonomickou teorií podložený tvar funkce $F(k)$, asi nebude snadné nalézt řešení ve tvaru $k = k(t)$, t.j. kapitál jako funkce času. V reálných případech budeme zřejmě odkázáni na numerické řešení diferenciální rovnice (2.1).

A konečně pátá sekce *Chování funkce* $k(t)$ *pro* $t \to \infty$ navazuje na druhý výsledek předešlé sekce. Nesnadnost nalezení maximálního řešení na celém $\mathbf{R}$ je motivem nalézt vlastnosti tohoto řešení alespoň pro „velké“ hodnoty času t. Na základě lineární a kvadratické aproximace funkce $F(k)$ v okolí stacionárního bodu jsou odvozeny a diskutovány dva funkční předpisy pro odhad chování řešení Solowova modelu pro $t \to \infty$.

Matematická část je doplněna dvěma dodatky. V Dodatku 1 *Autonomní diferenciální rovnice* je uveden způsob řešení jedné autonomní diferenciální rovnice $y' = g(y)$. V Dodatku 2 *Míra růstu* jsou uvedeny vlastnosti míry růstu, kterých se využívá v ekonomické části textu.

2.1 Stabilita stacionárního řešení

Budeme předpokládat, že rovnice (2.1) je takové povahy, že každé maximální řešení je definováno na intervalu (T, ∞), kde $-\infty \leq T < 0$. V sekci o Solowově modelu ukážeme, že rovnice (2.1) odpovídající Solowovu modelu tento předpoklad splňuje. Uveďme nejprve dvě základní definice.

Definice: Nechť k^*, $k^* \in I$, je kořen rovnice $F = 0$, t.j. $F(k^*) = 0$. Pak konstantní řešení diferenciální rovnice (2.1) $k(t) = k^*, t \in \mathbf{R}$, se nazývá stacionárním řešením a bod k^*, $k^* \in I$, se nazývá stacionárním bodem diferenciální rovnice (2.1).

Označením $k(0)$ budeme značit počáteční podmínku, t.j. hodnotu funkce k v počátečním bodě t=0. Uvažujeme-li diferenciální rovnici (2.1) s počáteční podmínkou $k(0) = k^*$, pak konstantní funkce $k(t) = k^*, t \in \mathbf{R}$, je stacionárním řešením diferenciální rovnice (2.1). Zajímá nás stabilita tohoto stacionárního řešení, t.j. jak se vzdálí hodnoty maximálního řešení $k(t)$ pro „velké“ časy od hodnoty k^*, když se s hodnotou $k(0)$ „trochu“ odchýlíme od hodnoty k^*. Nejprve vyslovíme definici.

Definice: Nechť $k = k^*$ je stacionární bod diferenciální rovnice (2.1). Řekneme, že stacionární bod je stabilní, jestliže platí následující tvrzení: Ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ takové, že pro každé maximální řešení $k(t)$ diferenciální rovnice (2.1) s počáteční podmínkou $k(0)$, $\mid k(0) - k^* \mid < \delta$, platí $\mid k(t) - k^* \mid < \varepsilon$ pro všechna $t > 0$. Jestliže navíc existuje $\gamma, \gamma > 0$, takové, že pro každé maximální řešení $k(t)$, které splňuje $\mid k(0) - k^* \mid < \gamma$, platí

$$\lim_{t \to \infty} k(t) = k^*\,, \tag{2.2}$$

tak řekneme, že stacionární bod je asymptoticky stabilní. Jestliže stacionární bod není stabilní, říkáme, že je nestabilní.

Kritérium stability má následující tvar[2]:

Věta 1. Nechť k^* ,$k^* \in I$, je stacionární bod diferenciální rovnice (2.1), kde $F \in C^1(I)$. Pak platí:
a) Jestliže $dF/dk < 0$ v bodě $k = k^*$, pak stacionární bod k^* je asymptoticky stabilní.
b) Jestliže $dF/dk > 0$ v bodě $k = k^*$, pak stacionární bod k^* je nestabilní.

Kritérium nic neříká pro případ, že $dF/dk = 0$. Tímto případem se nebudeme zabývat, neboť u Solowova modelu tento případ nenastává.

Příklady

a) $\dot{k} = 5 - k, \quad k \in \mathbf{R}$,
kde stacionárním bodem je $k^* = 5$ a stacionární řešení má tvar $k(t) = 5$, $t \in \mathbf{R}$. Jedná se o asymptoticky stabilní stacionární bod, neboť $dF/dk = -1$. Je to též zřejmé z tvaru maximálního řešení

$$k(t) = 5 + (k(0) - 5)\exp(-t) \qquad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

b)$\dot{k} = k - 5, \quad k \in \mathbf{R}$,
kde opět platí $k^* = 5$ a stacionární řešení má tvar $k(t) = 5$, $t \in \mathbf{R}$. Jedná se však o nestabilní stacionární bod, neboť $dF/dk = 1$ a maximální řešení má tvar

$$k(t) = 5 + (k(0) - 5)\exp(t) \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

a platí

$$\lim_{t \to \infty} k(t) = \infty\,.$$

2.2 Podmínky existence maximálních řešení na R

Následující věta je zjednodušenou verzí tvrzení uvedeného ve *Skriptech* str. 111.

Věta 2. Nechť funkce $F(k)$ je spojitá a kladná (resp. záporná) na intervalu (a,b), $-\infty \le a < b \le \infty$. Nechť existuje $c \in (a,b)$ takové, že

[2] D.G.Zill a M.R.Cullen: Advanced Engineering Mathematics, str. 619, Jones and Bartlett Publishers, 2000, USA; viz také speciální případ Ljapunovy věty, *Skripta* str. 189, kde v našem případě jde o matici 1×1, a vlastním číslem je samotný prvek dF/dk

oba integrály $\int_a^c 1/F\,dk$ a $\int_c^b 1/F\,dk$ divergují. Pak maximální řešení s hodnotami v (a,b) jsou definována na celém $\mathbf{R}$.

Poznámka k Větě 2: Divergence výše uvedených integrálů je nejen postačující, ale také též nutnou podmínkou existence maximálního řešení s hodnotami v (a,b), které je definované na celém $\mathbf{R}$. Jestliže např. funkce $F(k)$ je spojitá a kladná (resp. záporná) na intervalu (a,b) a integrál $\int_a^c 1/F\,dk$ konverguje a integrál $\int_c^b 1/F\,dk$ diverguje, pak řešení s hodnotami v intervalu (a,b) jsou definovány na intervalech typu (T,∞) (resp. $(-\infty,T)$), kde hodnota $T, T \in \mathbf{R}$, závisí na volbě počáteční podmínky $k(0), k(0) \in (a,b)$. Podrobněji viz *Skripta* str. 111.

Funkce $F(k)$ v Solowově modelu má určité speciální vlastnosti, a proto se nám pro diskusi Solowova modelu budou hodit věty v následujícím tvaru:

Věta 3. Nechť funkce F má spojitou první derivaci na intervalu $(a,b), \infty < a < b \leq \infty$ a je na tomto intervalu kladná (resp. záporná). Nechť dále platí $F(a) = 0$ a existuje[3] nenulová vlastní limita $\lim_{k\to a+} F'(k) = q$. Pak integrál $\int_a^c 1/F\,dk$ diverguje pro všechna $c \in (a,b)$.

Důkaz: Z l'Hospitalova pravidla plyne

$$\lim_{k\to a+} \frac{F(k)}{k-a} = \lim_{k\to a+} F'(k) = q\,.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $q > 0$. Pak z definice limity plyne, že existuje $d \in (a,b)$ takové, že pro $k \in (a,d)$ platí

$$\frac{1}{2}q(k-a) < F(k) < 2q(k-a)\,,$$

a tedy

$$\frac{1}{2q(k-a)} < \frac{1}{F(k)} < \frac{2}{q(k-a)}\,.$$

Protože integrál $\int_a^d 1/(k-a)\,dk$ diverguje, tak ze srovnávacího kriteria (*Skripta* str. 109) plyne divergence integrálu $\int_a^d 1/F\,dk$. Integrál $\int_d^c 1/F\,dk$ konverguje pro všechna $c \in (a,b)$, neboť funkce $1/F$ je spojitá

[3] V dalším textu užíváme zkráceného zápisu F' místo dF/dk.

na omezeném uzavřeném intervalu $< d,c >$. Odtud plyne divergence integrálu $\int_a^c 1/F\,dk$.

Věta 4. Nechť funkce F má spojitou první derivaci na intervalu (a,b), $-\infty \leq a < b < \infty$ a je na tomto intervalu kladná (resp. záporná). Nechť dále platí $F(b) = 0$ a existuje nenulová vlastní limita $\lim_{k\to b_-} F'(k) = q$. Pak integrál $\int_c^b 1/F\,dk$ diverguje pro všechna $c \in (a,b)$.

Důkaz: Je zcela analogický jako v předchozím případě.

Následující tvrzení řeší případ $b = \infty$.

Věta 5. Nechť funkce $F(k)$ má spojitou první derivaci na intervalu (a,∞), $a \geq -\infty$. Nechť existuje nenulová vlastní limita $\lim_{k\to\infty} F'(k) = q$. Pak integrál $\int_c^\infty 1/F\,dk$ diverguje pro všechna $c \in (a,\infty)$.

Důkaz: Důkaz je analogický jako důkaz Věty 3. Opět z l'Hospitalova pravidla plyne

$$\lim_{k\to\infty} \frac{F(k)}{k} = \lim_{k\to\infty} F'(k) = q\,.$$

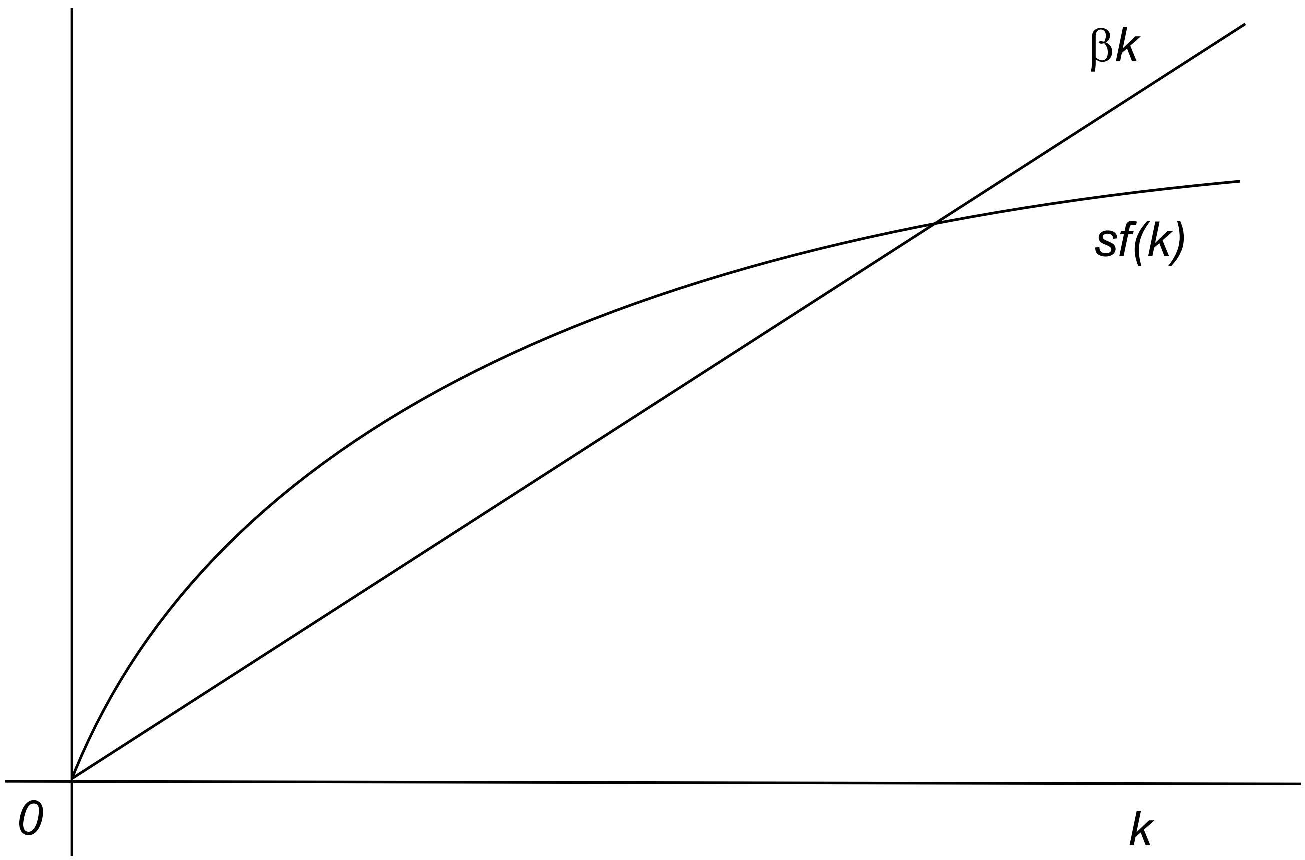
Bez újmy na obecnosti předpokládejme $q > 0$. Pak z definice limity plyne, že existuje $d \in (a,\infty)$ takové, že pro $k \in (d,\infty)$ platí

$$\frac{1}{2}qk < F(k) < 2qk\,,$$

a tedy

$$\frac{1}{2qk} < \frac{1}{F(k)} < \frac{2}{qk}\,.$$

Protože integrál $\int_d^\infty 1/k\,dk$ diverguje, tak ze srovnávacího kriteria (*Skripta* str.109) plyne divergence integrálu $\int_c^\infty 1/F\,dk$. Integrál $\int_c^d 1/F\,dk$ konverguje pro všechna $c \in (a,\infty)$, neboť funkce $1/F$ je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle c,d\rangle$. Odtud plyne divergence integrálu $\int_c^\infty 1/F\,dk$.



Obrázek 2.1: Kvalitativní tvar funkce $f(k)$

2.3 Matematické vlastnosti Solowova modelu

Solowův model zachycující časový vývoj kapitálu na jednotku efektivní práce má matematické vyjádření dané diferenciální rovnicí (2.1), kde

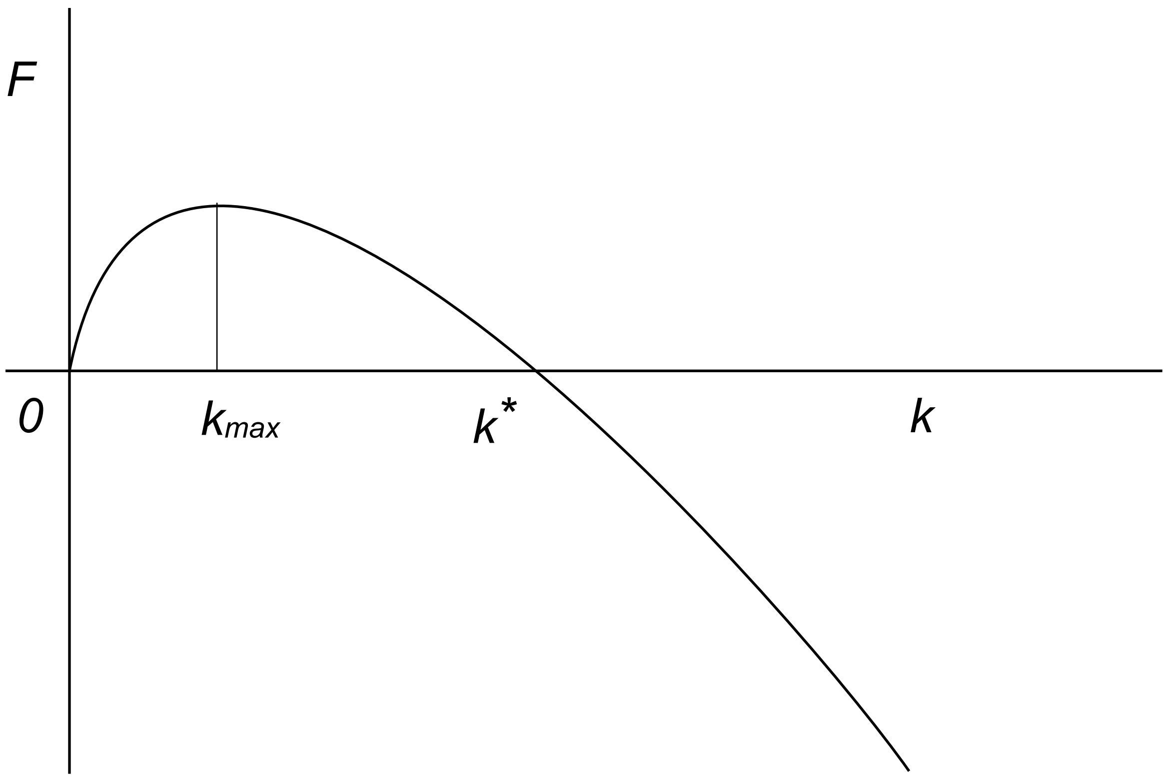
$$F(k) = sf(k) - \beta k \qquad k \in <0, \infty) \tag{2.3}$$

s následujícími vlastnostmi[4]:

1) Koeficienty β a s jsou kladná čísla. Tedy platí

$$\beta > 0, \qquad s > 0. \tag{2.4}$$

[4]Na obr. 2.1 je uveden kvalitativní tvar funkce $f(k)$ a na obr. 2.2 kvalitativní tvar funkce $F(k)$. Vlastnosti obou funkcí budou v dalším textu diskutovány.



Obrázek 2.2: Kvalitativní tvar funkce $F(k)$

2) $f \in C^\infty(I), I = (0, \infty)$ a pro všechna $k \in I$ platí

$$f'(k) > 0\,, \qquad f''(k) < 0\,. \tag{2.5}$$

3) Platí

$$f(0) = 0\,, \qquad \lim_{k \to 0+} f(k) = 0\,. \tag{2.6}$$

4) Solowův model je obvykle doplněn dalšími dvěma požadavky, které se týkají chování funkce f v blízkosti 0 a ∞. V prvém případě budeme diskutovat dva užívané modely:

$$\frac{\beta}{s} < \lim_{k \to 0+} f'(k) < \infty \qquad \text{model A} \tag{2.7}$$

$$\lim_{k \to 0+} f'(k) = \infty \qquad \text{model B} \tag{2.8}$$

Modely A a B jsou z ekonomického hlediska ekvivalentní, neboť jejich cílem je vyjádřit skutečnost, že produkt kapitálu f „prudce" roste na počátku, když je kapitálu k málo. U modelu A se uvádí, že hodnota $f'(k)$ je v jistém pravém prstencovém okolí bodu 0 natolik „dostatečně" velká, že existuje pravé prstencové okolí bodu 0 takové, že funkce $F(k)$ je v něm rostoucí. To znamená, že platí

$$\lim_{k\to 0+} F'(k) \;=\; s\,(\lim_{k\to 0+} f'(k)) \;-\; \beta \;>\; 0\,, \tag{2.9}$$

kde obě limity jsou vlastní. Proto byla použita formulace uvedená ve vztahu(2.7).Totéž samozřejmě zajišťuje i model B (tzv. první Inadova podmínka). Z matematického hlediska je však mezi modely A a B rozdíl, neboť (jak bude ukázáno později) v obou případech má maximální řešení jiné kvalitativní vlastnosti.

5) Druhý požadavek se týká chování funkce f pro velké hodnoty k a má tvar

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0\,, \tag{2.10}$$

což je tzv. druhá Inadova podmínka vyjadřující ekonomickou skutečnost, že nárust produktu kapitálu je malý, je-li kapitál velký. Z předchozího vztahu plyne

$$\lim_{k\to\infty} F'(k) \;=\; -\beta\,, \tag{2.11}$$

tedy funkce F má asymptotu a pro „velká" k se funkce F „chová" jako lineární funkce, jejímž grafem je přímka se směrnicí $-\beta$.

Souhrnem uvedeno je $F \in C^\infty(I)$ (viz obr. 2.2) a má následující vlastnosti:

$$F(0) = 0\,, \qquad \lim_{k\to 0+} F(k) = 0 \tag{2.12}$$

$$F'(0_+) \;=\; \lim_{k\to 0+} F'(k) \;>\; 0 \tag{2.13}$$

$$F''(k) \;<\; 0 \qquad k \in I \tag{2.14}$$

$$-\infty < \lim_{k\to\infty} F'(k) < 0\,, \qquad \lim_{k\to\infty} F(k) = -\infty\,. \tag{2.15}$$

Ze vztahu (2.14) vyplývá, že první derivace $F'(k)$ je klesající funkcí v intervalu I. Ze vztahů (2.13) a (2.15) vyplývá, že existuje právě jeden bod $k_{max}, k_{max} \in I$, ve kterém má funkce F nulovou první derivaci a vzhledem k záporné hodnotě druhé derivace má funkce F v tomto bodě maximum. Existuje tedy právě jeden interval, ve kterém je funkce $F(k)$ rostoucí a právě jeden interval , ve kterém je klesající. Lze tedy tuto vlastnost Solowova modelu zapsat ve formě

$$F'(k) > 0 \quad k \in (0, k_{max})\,, \qquad F'(k) < 0 \quad k \in (k_{max}, \infty)\,. \tag{2.16}$$

Dále z předchozí úvahy plyne, že existuje právě jeden bod $k^*, k^* > 0$, pro který platí $F(k^*) = 0$, přičemž $k_{max} \in (0, k^*)$.

Diferenciální rovnice $\dot{k} = F(k)$ má tedy v intervalu I jediný stacionární stav $k = k^*$, který je asymptotický stabilní stacionární stav. To vyplývá ze shora uvedených skutečností, že funkce $F'(k)$ je klesající funkcí v intervalu I, přičemž v „dostatečně" malém okolí napravo od 0 je kladná, v bodě k_{max} je nulová a v bodě k^* je tedy záporná

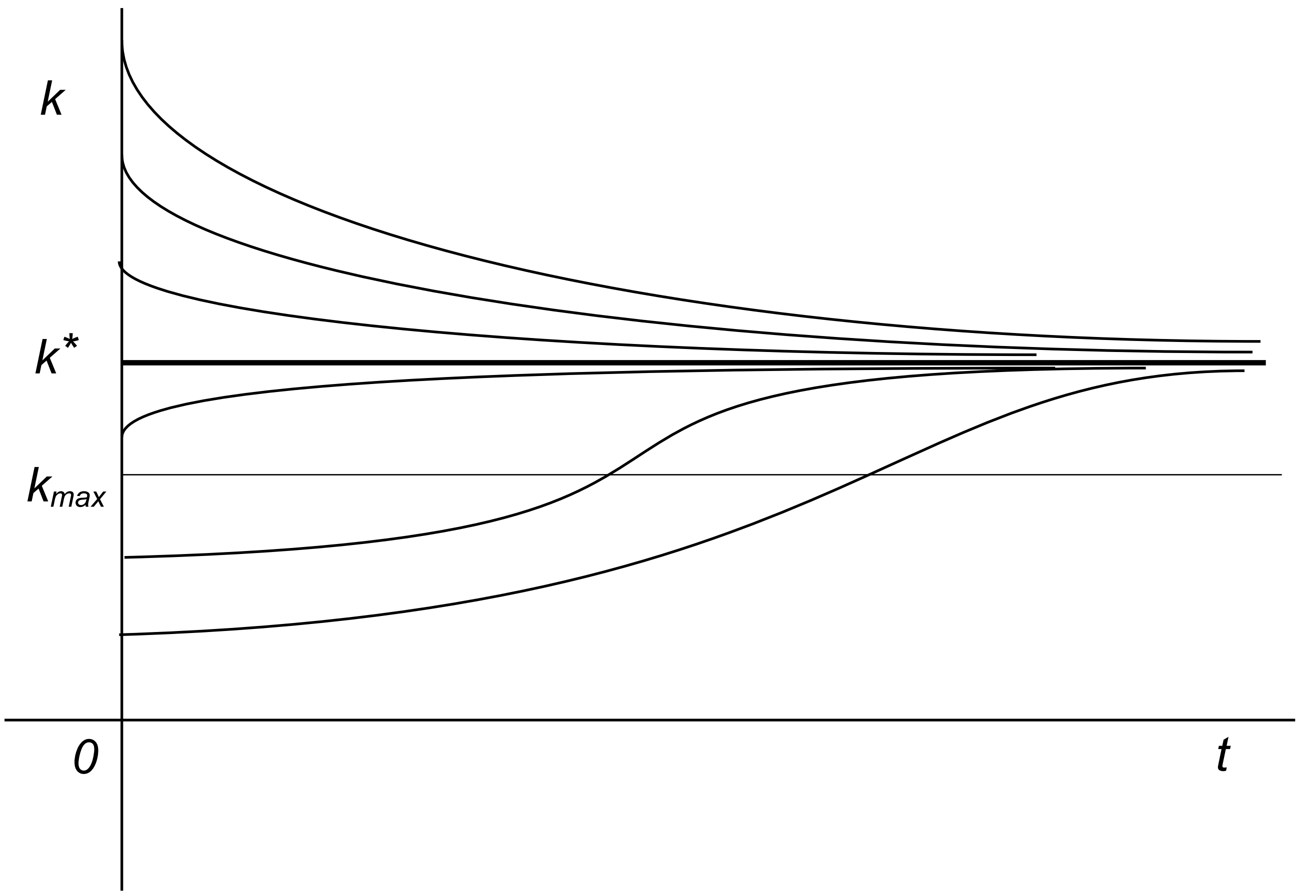
$$F'(k^*) < 0\,. \tag{2.17}$$

Je-li $k(0) > k^*$, pak je $\dot{k} = F(k) < 0$ (viz obr. 2), řešení $k(t)$ je proto klesající funkcí času v celém definičním oboru a platí (2.2). Naopak je-li $0 < k(0) < k^*$, pak maximální řešení $k(t)$ je rostoucí funkcí času v celém svém definičním oboru a opět platí (2.2)[5]. Z diferenciální rovnice (2.1) vyplývá

$$\frac{d^2k}{dt^2} = F'(k)F(k)$$

Odtud je zřejmé, že pro $k(0) > k^*$ je funkce $k(t)$ klesající a ryze konvexní v celém svém definičním oboru (T, ∞), kde $-\infty \le T < 0$. Je-li $0 <$

[5]Počáteční podmínka $k(0) = 0$ se v ekonomii nepoužívá, neboť nestabilní stacionární řešení (viz vztah (2.13)) $k(t) = 0, t \in (0, \infty)$ je v rozporu s ekonomickými zákony o růstu kapitálu.



Obrázek 2.3: Funkce $k(t)$, $t \geq 0$, pro různé počáteční podmínky $k(0)$

$k(0) < k^*$, pak pro takový čas t_1, pro který platí $k(t_1) = k_{max}$, má funkce $k(t)$ inflexní bod, přičemž pro $k(t) < k_{max}$ je ryze konvexní a pro $k(t) > k_{max}$ je ryze konkávní. Je-li tedy $k_{max} < k(0) < k^*$, pak funkce $k(t)$ je konkávní na celém $(0, \infty)$. Grafy funkcí $k(t), t \geq 0$, jsou pro různé počáteční podmínky vyneseny v obr. 2.3.

Zatím jsme vycházeli z předpokladu, že maximální řešení je definované na celém R nebo alespoň na intervalu (T, ∞), kde $-\infty \leq T < 0$. Ukažme, kdy tomu tak skutečně je. Platí následující věta:

Věta 6: Nechť funkce F definovaná vztahem (2.3) splňuje podmínky (2.4),(2.5), (2.6), (2.7) a (2.10). Pak pro libovolné $k(0) \in I$ je maximální řešení Solowovy úlohy (2.1) definované na celém $\mathbf{R}$.

Důkaz: Uvažujme nejprve interval $(a, b) = (k^*, \infty)$. Z vlastností funkce

F vyplývá, že jsou splněny předpoklady uvedené ve větách 3 a 5, neboť obě limity $\lim_{k\to k^*+} F'(k)$ a $\lim_{k\to\infty} F'(k)$ jsou vlastní a nenulové. Z věty 2 pak vyplývá, že maximální řešení, které je charakterizováno počáteční podmínkou $k(0), k(0) > k^*$ je definované na celém R. Uvažujme nyní interval $(a,b) = (0,k^*)$ Limita $\lim_{k\to k^*-} F'(k)$ je vlastní a nenulová. Druhá limita $\lim_{k\to 0+} F'(k)$ je dle předpokladu (2.7) nenulová a vlastní. Pro model A je tvrzení věty dokázáno.

2.4 Řešení jednoduchých Solowových modelů

Příklad 1: Numericky jeden z nejjednodušších předpisů pro funkci f resp. F, který (až na předpoklad ryzí konkavity funkce f či F na celém I a nespojitosti druhé derivace $F''(k)$ v bodě $k = 1$) vyhovuje všem předpokladům Solowova modelu typu A s parametry $s = 1, \beta = 1, k^* = 1$, má tvar

$$f(k) = 2k - k^2 \quad k \in \langle 0,1 \rangle\,, \qquad f(k) = 1 \quad k \in (1,\infty)\,,$$

a tedy

$$F(k) = k(1-k) \quad k \in \langle 0,1 \rangle\,, \qquad F(k) = 1 - k \quad k \in (1,\infty)\,.$$

Maximální řešení je definované na celém R a v tomto jednoduchém případě lze snadno odvodit jeho tvar

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{k(0)\exp(t)}{1-k(0)+k(0)\exp(t)} \qquad k(0) \in (0,1) \\ k(t) &= 1 + (k(0)-1)\exp(-t) \qquad k(0) \in (1,\infty)\,. \end{aligned}$$

Výhoda tohoto jednoduchého předpisu spočívá v tom, že jeho modifikací (viz dále příklady 2 a 3) lze snadno demonstrovat důsledky porušení platnosti některých předpokladů Solowova modelu.

Příklad 2: V minulém příkladu byl předpis pro funkci $F(k), F(k) = k(1-k)$, použit na intervalu $(0,1)$. Pokud bychom jej použili na celý interval I, t.j.

$$F(k) = k(1-k) \qquad k \in (0,\infty)\,,$$

pak by nebyla splněna podmínka (2.11) a pro interval (1,∞) by nebyly splněny předpoklady Věty 2, neboť integrál $\int_c^\infty 1/k/(1-k)\,dk$ konverguje pro $c > 1$. Proto také pro $k(0) > 1$ je maximální řešení

$$k(t) = \frac{k(0)\exp(t)}{1 - k(0) + k(0)\exp(t)} \qquad k(0) \in (1, \infty) \tag{2.18}$$

definované jen na intervalu $t \in (T,\infty)$, kde v bodě $t = T, T < 0$, se jmenovatel v předpise pro maximální řešení (2.18) rovná 0, t.j.

$$T = \ln \frac{k(0) - 1}{k(0)}\,.$$

<u>Příklad 3:</u> Model B můžeme simulovat předpisem

$$F(k) = \sqrt{k}\,(1-k) \quad k \in \langle 0,1\rangle\,, \qquad F(k) = 1 - k \quad k \in (1,\infty)\,.$$

Zřejmě platí

$$\lim_{k\to 0+} F'(k) \;=\; \infty$$

a na intervalu (0,1) nejsou splněny předpoklady Věty 2, neboť integrál $\int_0^c 1/\sqrt{k}/(1-k)\,dk$ konverguje pro $c < 1$. Ze substituce $\sqrt{k} = x$ a z následného rozkladu na parciální zlomky pro $k \in (0,1)$ plyne

$$\int \frac{dk}{\sqrt{k}(1-k)}\,dk \;=\; 2\int \frac{dx}{1-x^2}\,dx \;=\; \ln\frac{1+x}{1-x} \;=\; \ln\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\,.$$

Odtud lze snadno odvodit předpis pro maximální řešení pro $k(0) \in (0,1)$

$$\sqrt{k} \;=\; \frac{(1+\sqrt{k(0)}\,)\exp(t) + 1 - \sqrt{k(0)}}{(1+\sqrt{k(0)}\,)\exp(t) - 1 + \sqrt{k(0)}} \tag{2.19}$$

definované jen na intervalu $t \in (T,\infty)$, kde v bodě $t = T, T < 0$, se jmenovatel v předpise pro maximální řešení (2.19) rovná 0, t.j.

$$T = \ln\frac{1-\sqrt{k(0)}}{1+\sqrt{k(0)}}\,.$$

<u>Příklad 4:</u> Nalézt maximální řešení Solowova modelu lze jen ve speciálních případech volby „jednoduchého“ předpisu pro f resp. F , kdy

se podaří najít primitivní funkci k funkci $1/F(k)$ na intervalech $(0, k^*)$ a (k^*, ∞) a následně explicitně vyjádřit kapitál k jako funkci t. Ukažme to na jednoduchém umělém (kvalitativním) příkladu Solowova modelu s parametry $s = \beta = 1, k^* = 1$

$$f(k) = 2(1 - \frac{1}{k+1}) \quad \Rightarrow \quad F(k) = \frac{k(1-k)}{1+k} \quad k \in I\,. \tag{2.20}$$

Lze se snadno přesvědčit, že všechny předpoklady Solowova modelu typu A jsou splněny. Metodou rozkladu na parciální zlomky lze odvodit

$$\int \frac{1+k}{k(1-k)}\,dk \,=\, \ln\frac{k}{(1-k)^2} \qquad k \in\, I -\, (1)\,.$$

Z Věty 6 plyne existence maximálního řešení na celém $\mathbf{R}$ pro libovolné $k(0) \in I$. Z předchozího vztahu plyne

$$\frac{(1-k)^2}{k} \,=\, \gamma\,, \qquad \gamma \,=\, \frac{(1-k(0))^2}{k(0)}\exp(-t)\,. \tag{2.21}$$

Odtud plyne, že pro zvolený čas t a počáteční hodnotu $k(0)$ získáme hodnotu $k(t)$ řešením kvadratické rovnice

$$k^2 - (2+\gamma)k + 1 \,=\, 0\,.$$

Tato kvadratická rovnice má vždy dva reálné kořeny (neboť $\gamma > 0$), z nichž jeden leží v intervalu $(0,1)$ a druhý v intervalu $(1,\infty)$. Pro $t \to \infty$, t.j. $\gamma \to 0$ limitují oba kořeny ke stacionárnímu bodu $k^* = 1$ a pro $\gamma = 0$ má kvadratická rovnice dvojnásobný kořen $k = 1$. Je-li tedy $k(0) > 1$ resp. $0 < k(0) < 1$, pak jako hodnotu $k(t)$ volíme pravý resp. levý kořen uvedené kvadratické rovnice.

Příklad 5: V případě reálného Solowova modelu jsme téměř vždy odkázáni na numerické řešení diferenciální rovnice (2.1). Ukažme to na o něco složitějším příkladu

$$F(k) = \frac{\beta k(a-k)}{k+\delta} \qquad k \in I\,, \tag{2.22}$$

který je zobecněním vztahu (2.20). Pro $\beta > 0$, $\delta > 0$ a $a > 0$ jsou splněny všechny předpoklady Solowova modelu. Bod $k^* = a$ je asymptoticky stabilním stacionárním bodem, platí limita (2.11) a volbou parametru δ lze nastavit důležitou[6] reálnou (t.j. z ekonomických úvah vyplývající) hodnotu $F'(k^*)$

$$F'(k^*) = F'(a) = -\frac{\beta a}{a+\delta}\,.$$

Při integraci diferenciální rovnice budeme postupovat analogicky jako v předchozím příkladě. Z rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{1}{F(k)} = \frac{k+\delta}{\beta k(a-k)} = \frac{\delta}{\beta a k} + \frac{1+\delta}{\beta(a-k)}$$

plyne pro maximální řešení $k(t)$ vztah analogický se vztahem (2.21)

$$\frac{(a-k)^\varphi}{k} = \gamma\,, \qquad \gamma = \frac{(a-k(0))^\varphi}{k(0)}\exp(-\frac{a\beta}{\delta}t)\,, \tag{2.23}$$

kde $\varphi = a(1+\delta)/\delta$. Je zřejmé, že pro $a = \beta = \delta = 1$ jsou oba vztahy (2.21) a (2.23) totožné. V druhém obecnějším případě však již nelze vyjádřit explicitně funkci $k(t)$, jak to bylo možné v případě $\varphi = 2$.

2.5 Chování funkce $k(t)$ pro $t \to \infty$

Jak vyplynulo z příkladů uvedených v minule sekci, v mnoha případech nelze nalézt maximální řešení Solowova modelu v explicitní formě $k = k(t)$. Z tohoto důvodu nás zajímá alespoň „odhad“ chování funkce $k(t)$ pro $t \to \infty$. Za předpokladu že $k^*, k^* \in I, I = (0, \infty)$, je asymptoticky stabilní stacionární bod, je našim cílem stanovit chování maximálního řešení pro velké hodnoty času, tedy jak „rychle“ se přimyká graf funkce $k = k(t)$ ke grafu funkce $k(t) = k^*$ pro $t \to \infty$, kde k je maximální řešení rovnice (2.1) s počáteční podmínkou $k(0), k(0) > 0$[7].

Cílem tohoto odstavce je nalézt pro každé maximální řešení $k(t)$ Solowova modelu funkce $k_1(t), k_2(t) \in C^1(I)$ takové, že platí:
1) Existuje $t_1 \in I$ takové, že

$$k_1(t) \le k(t) \le k_2(t) \qquad t > t_1\,, \tag{2.24}$$

[6] viz další sekci

[7] V případě Solowova modelu existuje pouze jeden stacionární bod, který je asymptoticky stabilním stacionárním bodem, a proto není třeba blíže určit vlastnosti počáteční podmínky $k(0)$.

2) platí limitní vztahy

$$\lim_{t\to\infty} k_1(t) \;=\lim_{t\to\infty} k_2(t) \;=\; k^*\,, \tag{2.25}$$

3) rozdíl $k_2(t) - k_1(t)$ je klesající funkcí v intervalu $t > t_1$.

Geometrická interpretace výše uvedených požadavků je zřejmá. Pro zvolené maximální řešení (určené volbou počáteční podmínky) chceme nalézt „tunel“ v rovině $t - k$, který je ohraničen grafy funkcí k_1 a k_2 a ve kterém probíhá graf funkce k. Druhá podmínka požaduje, aby šířka „tunelu“ konvergovala k nule pro $t \to \infty$. Třetí podmínka pak navíc požaduje, aby šířka „tunelu“ byla klesající funkcí času (počínaje od jistého času t_1), tedy aby „malá“ hodnota $k_2(T) - k_1(T)$ implikovala i „malou“ hodnotu $k_2(T) - k_1(T)$, $t > T$. Pokud by měl být vztah (2.24) prakticky aplikován, pak se nelze jen spokojit s důkazem existence bodu t_1, ale je nutné umět nalézt konkrétní hodnotu bodu t_1. Pak lze postupovat tak, že je-li pro $t = T$, $T > t_1$, rozdíl $k_2(T) - k_1(T)$ přijatelně malý (rozumí se z hlediska uživatele), pak lze např. funkci $(k_1(t) + k_2(t))/2$ užít jako aproximaci funkce $k(t)$ v intervalu (T, ∞). V této úvaze využíváme třetí požadavek.

V dalším textu budeme několikrát potřebovat krátké lemma, které nyní vyslovíme a dokážeme:

Lemma: Nechť h_1 a h_2 patří do $C^1(a,b)$, kde $-\infty \le a < b \le \infty$, a nechť $h_1(\tilde a) = h_2(\tilde a)$, kde $\tilde a \in (a,b)$. Dále nechť pro všechna $t \in (\tilde a,b)$ platí $\dot h_1(t) < \dot h_2(t)$. Potom pro všechna $t \in (\tilde a,b)$ platí $h_1(t) < h_2(t)$.
Důkaz: Definujme novou funkci h předpisem $h(t) = h_2(t) - h_1(t), t \in (a,b)$. Zřejmě platí $h(\tilde a) = 0$ a $\dot h > 0$ v celém intervalu $(\tilde a,b)$. Tedy funkce $h(t)$ je kladná v celém intervalu $(\tilde a,b)$. Odtud již zřejmě plyne $h_2(t) > h_1(t)$ v celém intervalu $(\tilde a,b)$.

Geometrický význam lemmatu je zřejmý. Máme-li dvě diferenciální rovnice $\dot k = F_i(k), i = 1{,}2$, se stejnou počáteční podmínkou k(0), pak nerovnost mezi pravými stranami $F_i(k)$ na intervalu $(0, b)$ implikuje stejnou nerovnost mezi řešeními na tomtéž intervalu.

Zabývejme se nejprve určením horního odhadu $k_2(t)$. Zde využijeme podmínky (2.14) o ryzí konkavitě funkce $F(k)$ na I. Z definice ryzí konkavity vyplývá, že v $t-k$ rovině graf tečny funkce $F(k)$ zkonstruované v libovolném bodě $k_1 \in I$ leží vždy nad grafem funkce $F(k), k \in I \setminus \{k_1\}$. Z dosud vyloženého je zřejmé, že kvalitativní chování funkce $k(t)$ pro „velké" hodnoty času je určeno chováním funkce $F(k)$ v okolí asymptoticky stabilního stacionárního bodu $k = k^*$. Proto zkonstruujeme tečnu v bodě $k = k^*$. Platí

$$F(k) < F_2(k) \;=\; -\lambda(k - k^*) \qquad k \in I \setminus \{k^*\}\,, \tag{2.26}$$

kde nový parametr λ je definován vztahem

$$\lambda = -\frac{dF}{dk} > 0 \qquad \text{v bodě} \qquad k = k^* \tag{2.27}$$

a $F_2(k)$ je funkčním předpisem tečny funkce $F(k)$ v bodě $k = k^*$. Maximální řešení diferenciální rovnice

$$\dot{k} \;=\; F_2(k)$$

na $\mathbf{R}$ má tvar

$$k_2(t) = k^* + (k(0) - k^*)\exp(-\lambda t) \tag{2.28}$$

a dle výše uvedeného lemmatu je horním odhadem maximálního řešení $k(t)$ se stejnou počáteční podmínkou. Platí tedy

$$k(t) < k_2(t) \qquad t > 0\,. \tag{2.29}$$

Pro $k(0) > k^*$ je stacionární řešení dolním odhadem (t.j. $k_1(t) = k^*, t > 0$) a můžeme psát

$$k^* < k(t) < k_2(t)\,, \qquad k(0) > k^*\,, \qquad t > 0\,. \tag{2.30}$$

Všechny tři podmínky kladené na horní a dolní odhad maximálního řešení k jsou zřejmě splněny (v případě $k(0) > k^*$ je funkce $k_2 - k^*$ klesající pro $t > 0$, a tedy třetí podmínka je splněna).

Zbývá vyřešit nalezení dolního odhadu v případě počáteční podmínky $k(0), 0 < k(0) < k^*$. Naším cílem je (viz obr. 2.2) nalezení funkce $F_1(k), k \in (0, k^*)$, takové, že zaprvé platí

$$F_1(0) = F_1(k^*) = 0\,, \qquad 0 < F_1(k) \le F(k)\,, \qquad k \in (0, k^*)\,, \tag{2.31}$$

za druhé, že funkce $F_1(k)$ splňuje předpoklady Solowova modelu na intervalu $(0, k^*)$ a konečně za třetí, že lze nalézt maximální řešení $k_1(t)$ diferenciální rovnice $\dot{k} = F_1(k)$ s počáteční podmínkou $k(0), 0 < k(0) < k^*$. Pak by funkce $k_1(t)$ byla hledaným dolním odhadem funkce $k(t)$.

Hledejme funkci F_1 ve tvaru

$$F_1(k) = ak(k^* - k) \qquad k \in (0, k^*)\,, \tag{2.32}$$

kde a je největší takové kladné číslo, které splňuje požadavky ve vztahu (2.31). To, že takové kladné číslo a existuje, plyne z kladných hodnot derivací $F'(0_+)$ a λ (viz (2.13) a (2.27)) a vztahu $F(k) > 0, k \in (0, k^*)$. Ze vztahu $F_1'(k) = a(k^* - 2k)$ plyne $a \in (0, a_{max} >$, kde

$$a_{max} = \frac{1}{k^*} \min(F'(0+), \lambda)\,. \tag{2.33}$$

Nalezení (resp. přibližné nalezení) parametru a je úlohou numerické matematiky a je myšlenkově jednoduché. Volíme postupně např. hodnoty $a = a_{max}$, $a = 0.999a_{max}$, $a = 0.998a_{max}$, $a = 0.997a_{max}$ atd. a při každé volbě testujeme, zda funkce $F(k) - ak(k^* - k)$ je kladná. Tento test se provádí tak, že interval $(0, k^*)$ se rovnoměrně pokryje sítí bodů $k^{(i)} = ik^*/n$, $i = 1,2,...,n-1$, kde n je „dostatečně“ velké číslo, a testuje se znaménko výše uvedeného rozdílu na této síti bodů. Pokud je některá hodnota záporná, pak se sníží hodnota a a postup se opakuje. Pokud nikoliv, pak jsme nalezli hodnotu parametru a. Z rozkladu na parciální zlomky

$$\frac{1}{ak(k^* - k)} = \frac{1}{ak^*}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k^* - k}\right)$$

vyplývá, že řešení diferenciální rovnice $\dot{k} = ak(k^* - k)$ na I má tvar

$$k_1(t) \;=\; \frac{k^* k(0)\exp(ak^* t)}{k^* - k(0) + k(0)\exp(ak^* t)}\,. \tag{2.34}$$

Spojením se vztahem (2.30) získáváme požadované odhady ve formě

$$k^* < k(t) < k_2(t)\,, \qquad k(0) \;>\; k^*\,, \qquad t > 0 \tag{2.35}$$

$$k_1(t) \le k(t) < k_2(t)\,, \qquad k(0) \;<\; k^*\,, \qquad t > 0 \tag{2.36}$$

kde funkce $k_1(t)$ a $k_2(t)$ jsou dány vztahy (2.28) a (2.34).

A nyní zbývá vyřešit už jen splnění třetí podmínky pro hledaný „tunel“, t.j. pro $k(0) < k^*$ nalézt bod t_1 takový, že funkce $\delta k(t) = k_2(t) - k_1(t)$ je klesající pro $t > t_1$. Protože platí $\delta k(0) = \delta k(\infty) = 0$, je zřejmé, že funkce $\delta k(t)$ má alespoň jeden bod maxima na I. Nalezení nejvyšší hodnoty t_1, ve které má funkce $\delta k(t)$ maximum, je opět úlohou numerické matematiky. Jedná se o nalezení kořenů nelineární rovnice

$$\delta\dot{k} = \dot{k}_2 - \dot{k}_1 = F_2(k_2(t)) - F_1(k_1(t)) \;=\; 0\,.$$

Pokud bychom měli další informace o chování funkce $F(k)$ v intervalu $(0, k^*)$, mohli bychom zvolit předpis pro funkci $F_1(k)$ vhodněji, než je tomu ve vztahu (2.32). Nicméně i tato volba může poskytnout velmi dobrý dolní odhad, neboť hodnota $F'(0_+)$ (v modelu B je rovna nekonečnu) bývá v konkrétních případech větší než hodnota λ a tedy (viz vztah (2.33)) hodnota parametru a může být v praktických úlohách rovna nebo „blízká“ optimální hodnotě parametru λ/k^* (pro $a = \lambda/k^*$ mají funkce $F(k)$ a $F_1(k)$ stejnou hodnotu derivace v bodě $k = k^*$).

Je zřejmé, že hodnota λ ovlivňuje jak „rychle“ se přimyká graf funkce $k(t), k(0) \neq k^*$, ke grafu konstantní funkce $k(t) = k^*$ pro $t \to \infty$. Čím je hodnota λ větší, tím je průběh funkce $k(t)$ strmější. V ekonomii se hodnota parametru λ obvykle určuje z následující úvahy. Platí

$$\lambda = -\left(\frac{dF}{dk}\right)_{k=k^*} = -(sf'(k^*) - \beta)\,.$$

Za hodnotu s dosadíme z podmínky $sf(k^*) - \beta k^* = 0$. Tím obdržíme vztah

$$\lambda = \beta(1 - \alpha)\,,$$

kde pro parametr α platí

$$\alpha = \frac{k^* f'(k^*)}{f(k^*)}\,.$$

2.6 Dodatek 1. Autonomní diferenciální rovnice

V Solowově modelu se vyskytují autonomní difererenciální rovnice. V souvislosti s tím zde bude podán obecný postup jejich řešení. Definujme si nejprve obecnější rovnici se separovanými proměnnými. **Rovnice se separovanými proměnnými** je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(t), \tag{2.37}$$

t.j. taková, kde pravá strana je součinem dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na hodnotách $y = y(t)$ a druhá pouze na t, veličiny t a y jsou tedy „separovány“ neboli odděleny. **Autonomní rovnice** jsou rovnice tvaru

$$y' = g(y), \tag{2.38}$$

t.j. takové, ve kterých se explicitně nevyskytuje nezávisle proměnná označující v našem případě čas. Ty popisují procesy, jejichž vývoj záleží jen na okamžitém stavu a nikoliv přímo na čase, tedy na tom, který je den a kolik je hodin. Autonomní rovnice jsou speciálním případem rovnic se separovanými proměnnými (funkce h je identicky rovna jedné). Obecná metoda **řešení autonomní rovnice** má následující kroky:

1. krok. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak funkce $y(t) = c$ je řešením rovnice (2.38) na $(-\infty,\infty)$. Těmto řešením říkáme **stacionární** nebo **singulární**.

2. krok. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g spojitá a nenulová.[8] Na těchto intervalech je tedy funkce g vždy kladná (resp. záporná). Označme jeden takový interval (a,b).

3. krok. Budeme hledat řešení, která mají hodnoty v intervalu (a,b). Je-li y takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = 1 \qquad t \in I\,, \tag{2.39}$$

[8] Řekneme, že funkce g je spojitá a nenulová na maximálním intervalu (a,b), jestliže pro každý interval (c,d), na kterém je funkce g spojitá a nenulová, platí implikace $(c,d) \bigcap (a,b) \neq 0 \Rightarrow (c,d) \subseteq (a,b)$.

kde $I, I \subset \mathbf{R}$ je nějaký otevřený interval. Nechť G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na (a,b). Tato primitivní funkce existuje, protože $1/g$ je spojitá na (a,b). Potom $f_1(t) = t$ je primitivní funkcí pravé strany (2.39) na I a $f_2(y) = G \circ y$ zase primitivní funkcí levé strany rovnice (2.39) na (a,b). Je-li y řešení, musí se levá strana (2.39) rovnat pravé, a tedy se obě primitivní funkce f_1 a f_2 liší jen o konstantu. Tudíž existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že

$$G(y(t)) = t + c \qquad t \in I\,. \tag{2.40}$$

4.krok. Funkce G je rostoucí (resp. klesající), jelikož její derivace $1/g$ je kladná (resp. záporná), na (a,b). Existují tedy limity (věta o limitě monotónní posloupnosti)

$$A = \lim_{y \to a+} G(y), \qquad B = \lim_{y \to b-} G(y)\,.$$

Protože funkce G je spojitá na intervalu (a,b), zobrazuje tento interval na jistý interval (A,B). Hledaná řešení mají tedy tvar

$$y(t) = G^{-1}(t + c), \quad t \in (A - c, B - c); \qquad c \in \mathbf{R}$$

5.krok. Z nalezených řešení ve 4. kroku a singulárních řešení z 1. kroku slepíme všechna maximální řešení.

Ptáme se, jak se řešení y chová v blízkosti krajních bodů svého definičního oboru, konkrétně u pravého krajního bodu (u levého to bude obdobně). Zřejmě platí

$$\lim_{t \to (B-c)-} y(t) = b\,.$$

Zajímá nás, zda řešení dospěje k b v konečném čase či nikoliv, jinak řečeno zda je $B \in \mathbf{R}$ či $B = \infty$. Mohou nastat dva případy

- $B = +\infty$. Zde je y definováno „až do nekonečna“ a nemá tedy smysl mluvit o nějakém nalepování;
- $B \in \mathbf{R}$. Zde je y definováno na shora omezeném intervalu, hodnoty b tedy dosáhne v konečném čase. Pokud $g(b) = 0$ (pak by $y = b$ bylo singulárním řešením) a g je v bodě b spojitá zleva, lze pak k řešení y přilepit zmíněné singulární řešení konstantně rovné b. V ostatních případech není možné nalepovat.

2.7 Dodatek 2. Míra růstu

1) **Základní vlastnosti míry růstu.** Vyjděme ze skutečnosti, že míra růstu proměnné $X(t), X > 0$, je rovna časové derivaci[9] jejího logaritmu

$$\frac{X'(t)}{X(t)} = \frac{d(\log(X(t)))}{dt} \tag{2.41}$$

a dokažme následující:

(a) Míra růstu součinu dvou proměnných je rovna sumě jejich měr růstu. To znamená, pokud $Z(t) = X(t).Y(t)$, potom

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \frac{X'(t)}{X(t)} + \frac{Y'(t)}{Y(t)}\,.$$

(b) Míra růstu podílu dvou proměnných je rovna rozdílu jejich měr růstu. To znamená, pokud $Z(t) = X(t)/Y(t)$, potom

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \frac{X'(t)}{X(t)} - \frac{Y'(t)}{Y(t)}\,.$$

(c) Pokud $Z(t) = X(t)^\alpha$, potom

$$\frac{Z'(t)}{Z(t)} = \alpha\frac{X'(t)}{X(t)}\,.$$

2) Předpokládejme, že míra růstu nějaké proměnné $X(t)$, je dána vztahem

$$\begin{aligned} X'/X(t) &= a \qquad t \in \langle 0, t_1) \\ X'/X(t) &= a\frac{t-t_1}{t_2-t_1} \qquad t \in \langle t_1, t_2\rangle \\ X'/X(t) &= a \qquad t > t_2\,, \end{aligned}$$

kde $a, a > 0$, je parametr. Funkce $X(t)$ má bod nespojitosti v bodě $t = t_1$. Určete $\log(X)$.

[9] Pro lepší čitelnost textu užíváme apostrof pro časovou derivaci a nikoliv tečku jako v předchozích sekcích.

Důkaz a řešení

1) V důkazu využíváme vlastnosti funkce logaritmus.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{(X(t).Y(t))'}{X(t).Y(t)} &= \frac{d(\log(X(t).Y(t)))}{dt} = \frac{d(\log(X(t)) + \log(Y(t)))}{dt} \\ &= \frac{d(\log(X(t)))}{dt} + \frac{d(\log(Y(t)))}{dt} = \frac{X'(t)}{X(t)} + \frac{Y'(t)}{Y(t)}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{(X(t)/Y(t))'}{X(t)/Y(t)} &= \frac{d(\log(X(t)/Y(t)))}{dt} = \frac{d(\log(X(t)) - \log(Y(t)))}{dt} \\ &= \frac{d(\log(X(t)))}{dt} - \frac{d(\log(Y(t)))}{dt} = \frac{X(t)'}{X(t)} - \frac{Y(t)'}{Y(t)}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{(X(t)^\alpha)'}{X(t)^\alpha} &= \frac{d(\log(X(t)^\alpha))}{dt} = \frac{d(\alpha \log(X(t)))}{dt} = \alpha \frac{d(\log(X(t)))}{dt} \\ &= \alpha \frac{(X(t))'}{X(t)}\end{aligned}$$

2) Opět využijeme vztah (2.41), kde levá strana je zadaná a předpis pro $\log(X(t))$ získáme integrací funkce na levé straně uvedeného vztahu.
$t \in (0,t_1)$: $(\log(X))' = a$ a tedy $\log(X) = at + k$, kde k je konstanta.
$t \in < t_1,t_2 >$: $(\log(X))' = a(t - t_1)/(t_2 - t_1)$ s počáteční podmínkou $(\log(X))_{t=t_1} = at_1 + k$ a tedy $\log(X) = at_1 + k + \frac{a}{t_2 - t_1} \cdot \frac{(t-t_1)^2}{2}$.
$t \in (t_2,\infty)$: $(\log(X))' = a$ s počáteční podmínkou $(\log(X))_{t=t_2} = at_1 + k + \frac{a}{t_2-t_1} \cdot \frac{(t_2-t_1)^2}{2} = at_1 + k + \frac{a}{2}(t_2 - t_1) = a \cdot \frac{t_1+t_2}{2} + k$ a tedy $\log(X) = at_1 + k + \frac{a}{2}(t_2 - t_1) + a(t - t_2) = a(t + \frac{t_1-t_2}{2}) + k$.

Kapitola 3

Ekonomická část

3.1 Dynamika modelu

Jelikož technologický pokrok A i práce L jsou exogenní proměnné, budeme zkoumat pouze vývoj endogenní proměnné kapitálu K, resp. veličinu kapitál vztaženou na jednotku efektivní práce k, kde

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} . \tag{3.1}$$

Připomeňme předpoklady Solowova modelu, které byly uvedeny v 1. kapitole: Konstantní míra růstu technologického pokroku A i práce L, t.j. $\dot{L}(t) = nL(t)$, $\dot{A}(t) = gA(t)$, kde n a g jsou konstanty; vztah $f(k(t)) = y(t) = Y(t)/A(t)L(t)$ a vztah $\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$. Konstanty s a δ značí míru úspor a míru znehodnocení kapitálu, t.j. obě konstanty leží v intervalu (0,1).[1] Symbolem Y resp. y značíme produkt resp. produkt vztažený na jednotku efektivní práce. Obvykle, pokud nemůže dojít k záměně, se i pro proměnnou y užívá označení produkt. Z pravidla pro derivování podílu a z výše uvedených vztahů plyne

$$\dot{k(t)} = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t) . \tag{3.2}$$

Rovnice (3.2) je klíčovým vztahem Solowova modelu. Říká, že míra změny funkce k je dána rozdílem dvou členů. Prvním, $sf(k)$, jsou skutečné investice na jednotku efektivní práce a druhým, $(n+g+\delta)k$, jsou

[1] Jen připomeňme, že slovo **míra** se v ekonomii vyskytuje v mnoha označeních, která jsou však významově odlišná; *míra úspor* je číslo mezi 0 a 1 a udává nám relativní velikost úspor, *míra změny úspor* je ds/dt a *míra růstu úspor* je $d\log s/dt = (1/s)ds/dt$.

tzv. *vyrovnávající investice*, tzn. investice, které musí být uskutečněny, aby právě udržely k v jeho současné výši.

Vysvětleme si význam členu $(n + g + \delta)k$. Existující kapitál se na jedné straně opotřebovává, toto znehodnocení představuje člen δk, a na druhé straně roste množství efektivní práce mírou $n+g$ a tedy abychom udrželi $k = K/AL$ konstantní, musí K rovněž růst mírou $n + g$. To představuje člen $(n + g)k$.

Na obrázku 2.1 na str. 19 jsou oba členy zobrazeny jako funkce proměnné k. Chování těchto funkci je rovněž diskutováno v kapitole 2. Pro nás je důležité, že se funkce kromě počátku protnou jen v jednom bodě. Označme tento bod, ve kterém se skutečné a vyrovnávající investice rovnají, k^*.

Označme pravou stranu rovnice (3.2) jako funkci $F(k)$. Na obrázku 2.2 na str. 20 je uveden graf funkce $F(k), k \in (0, \infty)$. Pro $k < k^*$ je $\dot{k}(t) > 0$ a k je rostoucí funkcí času $t, t > 0$ a platí $k \to k^*$ pro $t \to \infty$. Naopak pro $k > k^*$ je $\dot{k}(t) < 0$, k je klesající funkcí času $t, t > 0$ a taktéž platí $k \to k^*$ pro $t \to \infty$. A nakonec pro $k = k^*$ je $\dot{k}(t) = 0$.

Důležitým závěrem této podkapitoly je tedy tvrzení, že **bez ohledu na počáteční hodnotu $k(0)$ konverguje k vždy ke k^*.**

Jak se proměnné modelu chovají v případě $k = k^*$? Kapitál K je roven ALk . Jelikož $k = k^*$ je konstantní a AL roste mírou $n+g$, pak i K roste mírou $n+g$. Předpoklad konstantních výnosů z rozsahu pak implikuje, že i Y roste stejnou mírou. A konečně produkt na jednotku práce Y/L roste mírou g. Hlavním závěrem je tedy výrok, že **bez ohledu na počáteční stav konverguje ekonomika k tzv. *stabilnímu stavu* - situaci, kdy každá proměnná modelu roste konstantní mírou**.

Míra růstu průměrné produktivity práce Y/L se ve stabilním stavu mění pouze se změnou g.

3.2 Dopad změny míry úspor

Míra úspor s je jedním z parametrů Solowova modelu, který je velice citlivý na hospodářskou politiku vlády. Proto je na místě položit si otázku, jaké jsou efekty vyšší míry národních úspor na dlouhodobý ekonomický růst. Až do vyvinutí Solowova modelu existovala běžná představa, že vyšší míra úspor vede ke zvýšení akumulace kapitálu, což generuje dlouhodobě vyšší míru hospodářského růstu. Závěry Solowova modelu jsou ale jiné.

Předpokládejme, že se ekonomika nachází ve stabilním stavu a dále, že došlo k trvalému zvýšení míry úspor s.

3.2.1 Dopad na produkt

KVALITATIVNÍ DŮSLEDKY

Zvýšení s posune křivku $sf(k)$ nahoru a posune tedy nahoru i její průsečík s křivkou $(n+g+\delta)k$. Aktuální objem investic je nyní vyšší než objem potřebný k udržení k na stávající úrovni. Proto k roste až do nového stabilního stavu k^{**}, který odpovídá novému průsečíku, pak je opět konstantní.

Nyní se zaměřme na průměrnou produktivitu práce. Je-li k konstantou, je míra růstu Y/L rovna g. Když ale k v důsledku zvýšení s roste, roste Y/L mírou ostře větší než g. Jen co ovšem k dospěje do nového stabilního stavu k^{**}, roste průměrná produktivita opět jen konstantní mírou g.

Z toho vyvodíme závěr: Zvýšení míry národních úspor **dočasně** zvýší míru růstu produktu nad míru růstu obyvatelstva a dlouhodobě **trvale zvýší úroveň průměrné produktivity práce** a tedy i životního standardu. Jde ovšem jen o tzv. „level effect“ , ne však růstový efekt. **Míra růstu průměrné produktivity práce se v novém stabilním stavu nemění** (je nula procent).

KVANTITATIVNÍ DŮSLEDKY

Mějme ekonomiku ve stabilním stavu $(k=k^*, y=y^*)$. Dlouhodobý efekt zvýšení míry úspor s na produkt (ve stacionárním stavu) se definuje jako[2]

$$\frac{dy^*}{ds} = f'(k^*)\frac{dk^*(s)}{ds}\,. \tag{3.3}$$

[2] Připomeňme, že $y=f$.

Ze vztahu (3.2) a z podmínky $\dot{k}(t) = 0$ dostáváme vztah $sf(k^*(s)) = (n+g+\delta)k^*(s)$, kde $y^*(s) = f(k^*(s))$. Derivací levé i pravé strany podle s získáme

$$sf'(k^*)\frac{dk^*}{ds} + f(k^*) = (n+g+\delta)\frac{dk^*}{ds}. \tag{3.4}$$

Z tohoto výrazu vyjádříme dk^*/ds a dosadíme do (3.3), takže dostaneme

$$\frac{dy^*}{ds} = \frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)}. \tag{3.5}$$

Abychom mohli tuto rovnici srozumitelně interpretovat, vynásobíme obě její strany výrazem s/y^*. Na pravé straně pak užijeme vztahu $sf(k^*) = (n+g+\delta)k^*$ k vyjádření s a také definičního vztahu $y(t) = f(k(t))$. Po úpravě dostáváme

$$\frac{s}{y^*}\frac{dy^*}{ds} = \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}, \tag{3.6}$$

kde $\alpha_k(k^*) = k^*f'(k^*)/f(k^*)$ je elasticita produktu vzhledem ke kapitálu. Na levé straně rovnice (3.6) máme elasticitu produktu vzhledem k míře úspor, tzn. citlivost produktu na změnu s.

Za našeho neoklasického předpokladu dokonalé konkurence platí, že investice do jednotky kapitálu jsou rovny jeho marginálnímu produktu. Ve stabilním stavu je tedy podíl produktu připadající na kapitál roven $k^*f'(k^*)/f(k^*)$ neboli $\alpha_k(k^*)$.

Ve většině zemí je podíl produktu připadající na kapitál roven zhruba jedné třetině. Použijeme-li to jako odhad $\alpha_k(k^*)$ ve vztahu (3.6), dostaneme, že elasticita produktu ve vztahu k míře úspor je přibližně rovna jedné polovině. Tzn. například 10 procentní zvýšení s (např z 20 procent produktu na 22 procent) zvýší produkt na jednotku práce jen asi o 5 procent.

Z předchozích výsledků můžeme formulovat závěr této podkapitoly: **Podstatné změny míry úspor s mají pouze mírný dopad na úroveň produktu na jednotlivce** (je-li ekonomika ve stabilním stavu).

3.2.2 Dopad na spotřebu

Jelikož spotřeba na jednotlivce c je definována jako

$$c = f(k)(1-s), \tag{3.7}$$

je zřejmé, že trvalé zvýšení míry úspor s povede k okamžitému poklesu spotřeby na jednotlivce c. Spotřeba pak ale postupně poroste s tím, jak bude růst k do své nové stabilní polohy k^*. Otázkou je, zda spotřeba nakonec překročí či nepřekročí svoji původní hodnotu před změnou s.

Označme spotřebu na jednotlivce ve stabilním stavu jako c^*. Ze vztahu (2.2) a ze skutečnosti, že ve stabilním stavu platí $\dot{k}(t) = 0$, plyne dosazením do (3.7)

$$c^* = f(k^*) - (n+g+\delta)k^* \,. \tag{3.8}$$

Jelikož k^* je určeno hodnotou s, můžeme psát

$$\frac{dc^*}{ds} = [f'(k^*(s)) - (n+g+\delta)]\frac{dk^*}{ds} \,. \tag{3.9}$$

Víme, že znaménko druhého členu ve vztahu (3.9) je kladné. Záleží tedy na znaménku prvního členu. Ten může být kladný, nulový či záporný a podle toho pak spotřeba reaguje na zvýšení s.

Je-li první člen nulový, platí-li tedy $f'(k^*) = n+g+\delta$, pak je rozdíl $c^* = f(k^*) - (n+g+\delta)k^*$ v bodě k^* maximální a spotřeba na hlavu je tedy na své maximální úrovni v rámci stabilního stavu. Tato hodnota k^* je označována jako **zlaté pravidlo úrovně kapitálu**.

3.3 Rychlost konvergence

Zde se budeme odkazovat především na druhou kapitolu (Matematická část). Bylo uvedeno, že bez ohledu na počáteční podmínku $k(0)$ konverguje $k(t)$ k k^* pro $t \to \infty$, kde k^* odpovídá shodě skutečných a vyrovnávajících investic. V oddíle (2.5) jsme odhadli rychlost této konvergence tak, že jsme funkci $k(t)$ omezili shora i zdola. Tyto odhady se nám hodí zejména v řešení konkrétních Solowových modelů se známými parametry. Abychom byli ovšem schopni o rychlosti konvergence říci něco obecného[3], užijeme nyní jen horní odhad (2.28)

$$k(t) \simeq k^* + [k(0) - k^*] \exp(-\lambda t), \tag{3.10}$$

vzniklý integrací diferenciální rovnice

$$\dot{k}(t) \simeq -\lambda[k(t) - k^*], \tag{3.11}$$

kde $k(0)$ je počáteční hodnota k a kde $\lambda = \beta[1 - \alpha_k(k^*)]$, (pozn. $\beta = n + g + \delta$).

Zapíšeme-li vztah (3.11) jako

$$\frac{\dot{k}(t)}{[k(t) - k^*]} \simeq -\lambda, \tag{3.12}$$

pak je zřejmé, že k konverguje ke k^* mírou růstu $\beta[1 - \alpha_k(k^*)]$.

Dále ukážeme, že y **konverguje k** y^* **stejnou mírou růstu, se kterou** k **konverguje ke** k^*. S užitím vztahů (3.11) a (3.10) můžeme psát

$$\dot{y}(t) = \dot{f}(k(t)) = \frac{df(k(t))}{dk}\dot{k}(t) \simeq -\left(\frac{df}{dk}\right)_{k=k^*} \lambda(k - k^*) \tag{3.13}$$

a platí zároveň

$$f(k) \simeq f(k^*) + \left(\frac{df}{dk}\right)_{k=k^*} (k - k^*). \tag{3.14}$$

Tuto rovnici pouze upravíme do tvaru

$$\left(\frac{df}{dk}\right)_{k=k^*} \simeq \frac{f - f^*}{k - k^*} \tag{3.15}$$

a dosadíme do vztahu (3.13)

$$\dot{f}(t) \simeq -\lambda(f - f^*), \tag{3.16}$$

[3] Dále používaný symbol $h_1 \simeq h_2$ znamená, že limity podílů h_1/h_2 a h_1'/h_2' jsou rovny jedné, když $t \to \infty$ resp. $k \to k^*$.

a tedy

$$f(t) \simeq f^* + [f(0) - f^*] \exp(-\lambda t). \tag{3.17}$$

Ze vztahů (3.10) a (3.11) vyplývá, že f roste stejnou mírou jako k.

Nyní zkusme použít předešlé poznatky na konkrétním příkladě. Z empirie víme, že $n + g + \delta$ bývá většinou okolo 6 procent ročně a podíl kapitálu na produktu kolem 1/3. Pak $(1 - \alpha_k)(n + g + \delta)$ je přibližně 4 procenta. Takže k a y se přibližují rychlostí 4 procenta zbývající vzdálenosti ke k^* a y^*. Trvá jim tedy zhruba 17 let ($(0{,}96)^{17} \doteq 0{,}5$) než urazí polovinu cesty ke stabilnímu stavu.

Výsledky této podkapitoly můžeme shrnout do tvrzení: **Nejen, že je celkový dopad podstatné změny s na produkt nevelký, ale zároveň k němu dochází velmi pomalu**.

3.4 Některé závěry plynoucí ze Solowova modelu

Teoretický koncept Solowova modelu vychází z toho, že dlouhodobý ekonomický růst a dlouhodobý růst průměrné produktivity práce závisí zcela na **dvou exogenních faktorech** – na míře růstu obyvatelstva n a na míře růstu technologického pokroku g, které **nejsou determinovány uvnitř modelu**. Dlouhodobý ekonomický růst v konceptu Solowova modelu je tedy **determinován exogenně, t.j. vnějšími faktory**. Tato zjednodušení patří mezi zjevné nedostatky modelu (v realitě samozřejmě existují stimuly vlády k podpoření technologického pokroku; stejně tak může vláda stimulovat např. porodnost, migraci, atd.)

Technologický pokrok je – podle modelu – dostupný všem zemím. V podmínkách otevřené ekonomiky a tedy volného toku zboží a toku kapitálu se proces konvergence prosazuje jednak přeléváním kapitálu ze zemí s vysokou kapitálovou vybaveností do zemí s nízkou kapitálovou vybaveností, jednak toky technologického know-how z technologicky vyspělejších zemí do méně vyspělých zemí. Může se tak dít v různých formách: přímými investicemi, transferem vědomostí, zaškolováním specialistů, nákupem strojů, nákupem licencí aj. **Všechny země světa**

by tedy měly konvergovat ke stejné úrovni průměrné produktivity práce.

V reálných podmínkách nejsou předpoklady Solowova modelu nikdy zcela splněny a proto některé závěry Solowova modelu nebyly potvrzeny ekonomickým vývojem ve všech zemích světa. Zatímco se po druhé světové válce tyto závěry v zásadě potvrdily v Západní Evropě, Severní Americe a Japonsku, tak většina zemí Afriky, Latinské Ameriky i Asie zůstávají méně rozvinutými zeměmi. Síly konvergence působí v uvedených zemích z řady příčin slabě.

Závěr

Byl proveden rozbor Solowova modelu z matematického hlediska, t.j. analýza vlastností řešení autonomní diferenciální rovnice $\dot{k} = F(k)$, kde funkce F je dána vztahem (2.3).

Bylo ukázáno, že zatímco v případě modelu A (viz vztahy (2.7) a (2.8)) je maximální řešení definováno na celém $\boldsymbol{R}$, tak v případě modelu B tomu tak není. To lze interpretovat tak, že v prvém případě se jedná o přirozený vývoj, jehož důsledkem je současná situace, zatíco v druhém případě došlo k nějakému impulzu zvenčí, který zapříčinil vývoj vedoucí k dnešnímu stavu.

Dále byl odvozen horní a dolní odhad řešení Solowova modelu. Pro $t \to \infty$ konvergují oba odhady k asymptoticky stabilnímu stacionárnímu řešení. To umožňuje odhadnout se zvolenou přesností řešení $k(t)$ a odhadnout i rychlost konvergence řešení k asymptoticky stabilnímu stacionárnímu řešení.

V ekonomické části práce jsou získané poznatky aplikovány především na vliv míry růstu s na dlouhodobý ekonomický růst. Jsou diskutovány původní představy (vyšší míra úspor generuje dlouhodobě vyšší míru hospodářského růstu) s odlišnými závěry plynoucími ze Solowova modelu: Zvýšení míry národních úspor dočasně zvýší míru růstu produktu nad míru růstu obyvatelstva a trvale zvýší úroveň průměrné produktivity práce a tedy i životního standardu (jde ovšem jen o tzv. level effect , ne však růstový efekt); míra růstu průměrné produktivity práce se v novém stabilním stavu nemění; podstatné změny míry úspor s mají pouze mírný dopad na úroveň produktu na jednotlivce (je-li ekonomika ve stabilním stavu). Důležitým důsledkem Solowova modelu je i tvrzení, že veličina y (produkt na jednotku efektivní práce) konverguje ke stacionárnímu hodnotě y^* se stejnou rychlostí jako veličina k (kapitál na jednotku efektivní práce) ke stacionární hodnotě k^*. Důsledkem je pak i tvrzení, že celkový dopad změny s na produkt je nejen nevelký, ale zároveň k němu dochází velmi pomalu.

Conclusion

We have completed a mathematical analysis of the Solow model, i.e. an analysis of properties of the solution of autonomous differential equation $\dot{k} = F(k)$, where the function F is given by relation (2.3).

It has been proved that whereas in case of model A a maximum solution is defined for all real numbers, it is not so for model B. It can be interpreted in the way, that model A represents a natural evolution resulting in present situation, whereas in model B there had been a stimulus from outside which caused a development leading to present situation. Further, an upper and lower estimate of Solow model solution has been derived. For $t \to \infty$ both estimates converge to asymptotically stable stationary solution. That enables us to both estimate the solution $k(t)$ with a desired accuracy and estimate speed of convergence of the solution to asymptotically stable stationary solution. Acquired mathematical conclusions are mainly applied in the section, where we determine the impact of savig rate on longrun economic growth. Former concepts (higher saving rate generates a higher growth rate of product in the long run) are compared with different conclusions resulting from Solow model: a rise of saving rate temporarily raises the growth rate of product above the growth rate of population and permanently raises the level of average productivity of labour and thus also standard of living (it is, however, only a "level effect", not a growth effect); the growth rate of average productivity of labour does not change in the new equilibrium; substantial changes of the saving rate have only moderate impact on the level of product per unit of effective labour (if economy is in equilibrium). An important conclusion of Solow model is a statement, that the quantity y (product per unit of effective labour) converges to stationary value y^* at the very same speed as k (capital per unit of effective labour) converges to the stationary value k^*. Furthermore, not only we say that the overall impact of change in saving rate on product is moderate, but it as well occurs rather slowly.

Literatura

1) Backhouse, R.: A History of Modern Economic Analysis, Basil Blackwell, Oxford 1985
2) Brown, M: Differential Equations and Their Applications, Springer Verlag, New York 1975
3) Chiang, A. C.: Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw-Hill, Singapore 1984
4) Dornbusch, R., Fischer, S.: Macroeconomics, 6th edition, International edition, Mc Graw-Hill Publishing Company, New York 1994
5) Hájková, V., John, O., Zelený, M.: Matematika, Karolinum, Praha 2000
6) Harrod, R. F.: Towards a Dynamic Economics, Macmillan, London 1948
7) Holman, R. a kol.: Dějiny ekonomického myšlení, C.H.Beck, Praha 2001
8) John, O., Kalenda, O., Zelený, M.: Matematika (pokračování), Matfyzpress, Praha 2003
9) Mach, M.: Makroekonomie II, 1. a 2. část, Melandrium, Praha 2001
10) Ralston, A.: Základy numerické matematiky, Academia, Praha 1973
11) Romer, D.: Advanced Economics, McGraw-Hill, New York 2001
12) Samuelson, P. A.: Ekonomie, Svoboda, Praha 1995
13) Solow, R. M.: A Contribution to the Theory of Economic Growth, Quarterly Journal of Economics, Vol. 70, p. 65-94, February 1956
14) Zill, D.G., Cullen, M. R.: Advanced Engineering Mathematics, Jones and Bartlett Publishers, USA 2000