

**UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE**  
**Fakulta sociálních věd**

---

**Institut ekonomických studií**



**Diplomová práce**

---

2004

Kamil Nekula

**UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE**  
**Fakulta sociálních věd**

**Institut ekonomických studií**

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Finanční opce**

**Vypracoval: Kamil Nekula**

**Konzultant: Doc. Ing. Miloslav. S. Vošvrda, CSc.**

**Akademický rok: 2003/2004**

**Prohlášení**

**Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil pouze uvedené prameny a literaturu.**

**V Praze dne 21. 3. 2004**

.....

**Tímto bych chtěl poděkovat doc. Ing. M. S. Vošvrdovi, CSc. za odborné rady a připomínky při vedení této diplomové práce.**

**Dále bych chtěl poděkovat za vstřícný přístup při osvětlení praktických otázek řediteli sekce bankovních obchodů ČNB Ing. Tomášovi Kvapilovi a kolegům z dealingu ČNB.**

**Za odbornou konzultaci při zpracování matematických modelů pak také děkuji prof. RNDr. Tomášovi Ciprovi, DrSc. z MFF UK.**

## ABSTRAKT

Trh s finančními opcemi představuje jeden z nejzajímavějších fenoménů ve finančním sektoru na světových kapitálových trzích posledních let. Na těchto trzích se obchoduje s kontrakty, které jsou odvozené (derivované) od podkladových aktiv, jimiž jsou např. fyzické komodity, měny, kmenové akcie nebo obligace. Opční derivát označuje takový finanční produkt, jehož cena se odvíjí zejména od cen bazických aktiv na promptním trhu. Vzhledem k této závislosti představují deriváty obecně určité podmíněné nároky, které výrazně ovlivňují matematiku těchto nástrojů.

Cílem práce je podrobná analýza hlavních druhů finančních opcí s důrazem na metody jejich oceňování jak ve spojitém čase užitím Blackova-Scholesova modelu (B-S) a jeho modifikací, tak v diskrétním čase užitím binomického a trinomického stromu (s ukázkami výpočtů z praxe). Práce se rovněž věnuje problémům, které vyvstávají při praktické aplikaci těchto teoretických modelů, zejména otázky volatility (historické a implikované), neboť B-S model předpokládá konstantní volatilitu, avšak volatilita výnosů (např. akcií) v žádném případě není konstantní a zcela jistě není determinována pouze cenou podkladového aktiva. Jednou z poruch volatility je jev nazývaný volatility smile a volatility smirk, o kterém bude také pojednáno.

Ačkoliv bych se chtěl ve své práci věnovat nejen základním skupinám finančních opcí, ale i jejich netradičním modifikacím (exotické opce), je zřejmé, že z podstaty věci, má práce nemůže být zcela vyčerpávající. Neustále totiž vznikají nové variace opčních obchodů.

## ABSTRACT

Contracts derived from underlying assets such as commodities, currencies, shares or bonds are traded on financial option markets, which have in the past ten years been one of the most important phenomena. An option derivate is a financial product with its price being predominantly deduced from the prices of underlying assets on the spot market. In consequence of the price dependency derivatives are general contingent claims exercising considerable influence on the mathematics of these instruments.

This thesis is aimed at giving an in-depth analysis of the main financial options. Particular emphasis has been placed on valuation methods in continuous time (the Black-Sholes model and the modifications), and valuation methods in discrete time (the binomial and trinomial tree). Attention is paid to issues arising in practical application of these models, e.g. issues historic or implied volatility. The B-S model is based on constant volatility, which is for instance in case of revenue volatility in actuality hardly constant or determined by the price only of the underlying assets. The work is as well concerned with volatility disturbances, e.g. the volatility smile or volatility smirk.

Much as the author wishes to deal with some less common modifications such as the exotic options, it is patently obvious that due to new varied option trades arising continually the work cannot be exhaustive.

# Obsah

<u>Úvod</u> .....	1
<u>1. Opce v praxi</u> .....	6
<u>2. Oceňování opcí</u> .....	14
<u>2.1 Prémie, vnitřní hodnota opce, časová hodnota opce</u> .....	14
<u>2.2 Hraniční vlastnosti opcí</u> .....	17
<u>2.3 Put-call parita</u> .....	18
<u>2.4 Blackův-Scholesův vzorec pro opční prémii</u> .....	19
<u>2.5 Garmanův, Kohlhagenův a Grabbeův model</u> .....	29
<u>2.6 Mertonův, Barone-Adesi a Whaleyův model</u> .....	30
<u>2.7 Míra zisku a její volatilita</u> .....	31
<u>2.7.1 Míra zisku</u> .....	31
<u>2.7.2 Typy volatility</u> .....	32
<u>2.7.3 Volatility Smile / Skew</u> .....	35
<u>2.8 Oceňování opcí užitím binomického modelu</u> .....	38
<u>2.8.1 Binomický model pro akcie nevyplácející dividendy</u> .....	39
<u>2.8.2 Binomický model pro akcie vyplácející dividendu</u> .....	45
<u>2.8.3 Konvergence binomického modelu k Black-Scholesově modelu</u> .....	50
<u>2.9 Oceňování opcí užitím trinomického modelu</u> .....	51
<u>2.9.1 Trinomický model pro akcie nevyplácející dividendy</u> .....	51
<u>3. Řecké míry (Greeks)</u> .....	56
<u>3.1 Greeks v B-S modelu</u> .....	56
<u>3.2 Greeks v Garman-Kohlhagenově modelu</u> .....	61
<u>3.3 Greeks v Mertonově, Baron-Adesi a Whaleyově modelu</u> .....	62
<u>4. Kombinace opcí</u> .....	63
<u>4.1 Kombinace kupních a prodejních opcí</u> .....	63
<u>4.2 Kombinace pouze kupních nebo pouze prodejních opcí</u> .....	65
<u>4.3 Kombinace opcí s podkladovým aktivem</u> .....	69
<u>5. Exotické opce</u> .....	71
<u>5.1 Packages</u> .....	71
<u>5.2 Nonstandard American Options</u> .....	72
<u>5.3 Forward Start Options</u> .....	72
<u>5.4 Compound Options</u> .....	73
<u>5.5 „As You Like It“ Options</u> .....	75
<u>5.6 Barrier Option</u> .....	76
<u>5.7 Binary Options</u> .....	77
<u>5.8 Lookback Options</u> .....	78
<u>5.9 Asian Options</u> .....	79
<u>5.10 Options to Exchange One Asset for Another</u> .....	80
<u>Závěr</u> .....	82
<u>Apendix</u> .....	86
<u>(A) Výpočet teoretické prémie call a put opcí na akcie KB</u> .....	86
<u>(B) Výpočet opční prémie call a put opcí na EUR/CZK</u> .....	90
<u>(C) Testování volatility smile / skew měnových opcí</u> .....	92
<u>Literatura</u> .....	102

## Úvod

Po roce 1989 došlo v České republice k zásadním změnám v mnoha oblastech života obyvatel naší země. Změny se týkaly zejména právních norem, začala nová éra budování moderní tržní ekonomiky. Cesta k tomuto cíli je sice pro nás trnitá, je však nezbytná a bude nás stát ještě mnoho úsilí. Náskok ostatních zemí, kde je již řadu let standardní ekonomické prostředí, se od bývalých středoevropských a východoevropských zemí výrazně zvýšil. Potrvá ještě mnoho let, než dojde ke srovnání v některých oborech a než se Česká republika zařadí mezi plně rozvinuté ekonomiky. V posledních 15 letech naše země sice dosáhla řady úspěchů v různých odvětvích, ale stále ještě nemůžeme hovořit o standardním ekonomickém prostředí. Jelikož je tato cesta po roce 1989 poměrně krátká, sbíráme stále zkušenosti, snažíme se učit a vybrat si to nejlepší z ostatních vyspělých ekonomik. V období budování tržního hospodářství se naše bankovní domy, ale i průmyslové podniky setkávají také s finančními opcemi či finančními deriváty obecně, které představují nový pojem nejen pro ně, ale i pro českou (často i odbornou) veřejnost.

Trh s finančními deriváty představuje jeden z nejzajímavějších fenoménů ve finančním sektoru na světových kapitálových trzích posledních let. Na těchto trzích se obchoduje s kontrakty, které jsou odvozené (derivované) od podkladových aktiv (*underlying assets*), jimiž jsou např. fyzické komodity, měny, kmenové akcie nebo obligace. Derivát označuje takový finanční produkt, jehož cena se odvíjí zejména od cen bazických aktiv na promptním trhu. Vzhledem k této závislosti představují deriváty určité podmíněné nároky (*contingent claims*), které výrazně ovlivňují také matematiku těchto nástrojů. Různým matematickým modelům ohodnocujících opční deriváty se v mé práci budu také významně věnovat.

V této souvislosti je však třeba vzít v úvahu určité specifikum České republiky, spočívající ve velikosti trhu a tedy v omezeném počtu subjektů, které mohou využívat finanční opce. Jde zejména o velké podniky, které by se měly naučit využívat různé druhy finančních instrumentů a umět pracovat s rizikem. Domnívám se, že znalosti o těchto produktech jsou velmi malé, převážná část podniků nemá ucelenou informaci o této problematice.

Pracovníci ekonomických a zahraničních odborů velkých podniků většinou tyto nástroje nevyužívají, a to z důvodu obecné neznalosti, určité obavy ze složitosti těchto procesů a také z důvodu nepochopení významu a důležitosti finančních derivátů. Před rokem 1989 se tyto

nástroje využívaly velmi omezeně, a proto se nedostaly příliš do povědomí běžných pracovních postupů.

Také banky, které zprostředkovávají tyto obchody, nebyly v 90. letech připraveny kvalifikovaně tyto služby poskytovat a v mnoha případech nenašly cesty k subjektům, které by tyto služby mohly využít. V současné době jsou již banky plně připraveny poskytovat finanční deriváty a bude záležet jenom na nich, jak ostatním subjektům dokáží představit a vysvětlit uvedené nástroje. Limitujícím faktorem při těchto obchodech je samozřejmě cena. Jde o to, aby tyto kontrakty byly pro podnik nejen přínosné, ale i finančně únosné. Cenová otázka bude hrát i v budoucnosti velkou úlohu.

Pro svou práci jsem si vybral téma, o kterém si myslím, že si zasluhuje velkou pozornost především proto, že patří mezi moderní prvky tržní ekonomiky a že informovanost mezi jednotlivými subjekty není, podle mého názoru, příliš velká.

Cílem mé práce je podrobná analýza finančních opcí s důrazem na metody jejich oceňování. Ačkoliv se ve své práci věnuji nejen základním skupinám opčních derivátů, ale i jejich netradičním modifikacím (exotické opce), je zřejmé, že z podstaty věci, má práce nemůže být zcela vyčerpávající. Neustále totiž vznikají nové variace derivátových obchodů. Práce je rovněž věnována problémům, které vyvstávají při praktické aplikaci těchto teoretických modelů, zejména otázky volatility, neboť různé oceňovací modely předpokládají konstantní volatilitu, avšak volatilita míry zisku v žádném případě není konstantní a zcela jistě není determinována pouze cenou podkladového aktiva. Jednou z poruch volatility je jev nazývaný volatility smile či skew, který bude testován na příkladu skutečně kotovaných opcí na Chicago Mercantile Exchange.

Celá práce je rozdělena do pěti kapitol a appendixu. První kapitola obecně uvádí do problematiky finančních opcí, včetně historie opčních kontraktů, jejich definic a jednotlivých typů. Druhá kapitola tvoří stěžejní část práce. Je zde odvozen nezbytný matematický a statistický aparát pro oceňování opcí jak ve spojitém, tak diskrétním čase. Ve spojitém případě jde především o slavný Blackův-Scholesův (B-S) model, ale i o jeho četné modifikace jako jsou např. Garmanův-Kohlhagenův a Grabbeův model či Mertonův, Barone-Adesi a Whaleyův model. Pro diskrétní případ je zde představen binomický model (a to i pro akcie nesoucí dividendy), včetně konvergence k B-S modelu, rovněž je zde naznačeno oceňování užitím trinomického modelu. Třetí kapitola je věnována řeckým mírám tzv. greeks, které měří riziko plynoucí ze změny těch faktorů, které ovlivňují výši opční prémie. Čtvrtá kapitola se zabývá kombinací opcí, neboť v praxi se opce nejrozličnějším způsobem skládají (nejen mezi sebou, ale i s jinými cennými papíry) podle spekulace na očekávání budoucího vývoje trhu.



Pátá kapitola představuje exotické opce, tj. opce s poměrně komplikovanými a na různé podmínky vázanými výplatami. Zpravidla bývají obchodovány na OTC trzích a jsou konstruovány finančními institucemi, aby uspokojily nejrozmanitější požadavky svých klientů. Na konci mé práce bych chtěl v appendixu ukázat aplikaci oceňovacích modelů pro výpočet teoretické opční prémie call a put opcí na příkladu akcií Komerční banky, a.s. (appendix A) a reálné opční prémie call a put opcí na měnový pár EUR/CZK (appendix B). V appendixu C je testován jev volatility smile / skew na příkladu amerických call opcí, kotovaných na CME (ticker ECH4C).

Byl bych rád, kdyby má práce o finančních opcích vedla k rozšíření povědomí o těchto nástrojích mezi další zájemce, kteří by se chtěli v této oblasti dále vzdělávat a rozšiřovat si své znalosti.

Předtím než se budeme podrobně věnovat finančním opcím, si nejprve pro lepší orientaci v oblasti teorii derivátů budeme charakterizovat tyto odvozené instrumenty obecně a provedeme jejich základní klasifikaci.

Deriváty patří mezi termínové obchody, které jsou na rozdíl od promptních (spotových) obchodů charakterizovány časovou diferencí mezi uzavřením obchodu a jeho plněním. V době uzavření termínového obchodu mezi dvěma účastníky (prodávajícím a kupujícím) jsou sjednány všechny jeho náležitosti, tj.

- stanovení povinnosti či práva prodat či koupit
- k stanovenému termínu v budoucnosti (tzv. *datum splatnosti derivátu*)
- stanovené množství
- stanovených finančních instrumentů (tzv. *bazické instrumenty*)
- za stanovenou cenu (tzv. *termínová cena, cena dodávky, delivery price*)

a případně další podmínky (např. místo a forma dodání, rámcové určení typu dluhopisů přicházejících v úvahu k dodání aj.).

Bouřlivý rozvoj finančních derivátů proběhl především v 70. a 80. letech dvacátého století jako reakce na nejistotu ohledně budoucího vývoje cen finančních instrumentů, neboť v důsledku nestability finančních trhů narůstá volatilita úrokových sazeb, měnových kursů a kursů cenných papírů (nestabilita komoditních trhů vedla k uzavírání termínových obchodů s komoditami na plodinových či surovinových burzách již v devatenáctém století). Finanční instituce a banky, které v té době ztrácely své nejlepší zákazníky v tradičních odvětvích,

zahrnuly nové produkty do nabídky svých služeb a nabízely řízení finančního rizika s pomocí derivátů.

Na derivátových trzích se obchoduje s tržním rizikem, které je díky derivátům odděleno od bazických instrumentů. S tím jsou ve shodě praktické formy užití derivátů:

- Zajištění (*hedging*) umožňuje právě redukovat či „úplně eliminovat“ tržní riziko obchodů s bazickými instrumenty tím způsobem, že se zafixuje jejich cena k sjednanému budoucímu termínu. Zajištění vedoucí k uzamčení budoucí ceny podkladových instrumentů má často takovou podobu, že případná ztráta (resp. zisk) na promptním trhu s podkladovými instrumenty je vyrovnána ziskem (resp. ztrátou) na termínovém trhu s deriváty, neboť zajišťující se subjekt zaujme na těchto dvou trzích navzájem zrcadlové pozice.
- Spekulace (*trading*) sjednává termínový obchod s cílem vydělat na cenovém vývoji, který spekulant předpokládá. Jinými slovy, spekuluje se zde na to, že dohodnutá termínová cena bude nižší (resp. vyšší) než skutečná cena podkladového aktiva na spotovém trhu, takže se termínově nakupuje (resp.) prodává. Jednoznačným spekulativním cílem je zde dosažení zisku (v hotovosti) a nikoliv fyzické získání či dodání bazického instrumentu. Proto se spekulant před splatností termínového obchodu z něj snaží přípustným způsobem vyvázat. Přes svou rizikovost jsou spekulativní transakce s deriváty značně oblíbené, neboť spekulant pomocí relativně malých částek vstupuje do hry o částky mnohonásobně vyšší (pákový efekt). Je ovšem nutno podotknout, že deriváty jsou obecně nástroji s nulovým součtem zisků a ztrát pro obě zúčastněné strany (hra s nulovým součtem): případné zisky spekulanta jsou na úkor ztrát jeho protistrany.

Klasifikace derivátů je možná z několika hledisek. Podle vzájemného postavení obou účastníků termínového obchodu rozlišujeme:

- *Opční* (či podmíněné) *deriváty* představují termínový obchod, při němž jeden z účastníků získává právo, nikoliv povinnost tento obchod k datu splatnosti uskutečnit. Tento účastník přirozeně přihlédne k tomu, jaká je k datu splatnosti skutečná cena podkladového aktiva. Naproti tomu postavení druhého účastníka je pasivní, neboť závisí na rozhodnutí účastníka v aktivní pozici. Účastník v aktivní pozici ovšem musí při vstupu do takového termínového kontraktu za svou výhodu zaplatit účastníkovi v pasivní pozici opční prémii. Účastník v aktivním postavení, který zaplatil opční prémii (koupil opci), zaujímá *dlouhou pozici* (*long position*) a účastník v pasivním postavení, který inkasoval opční prémii (upsal či prodal opci), zaujímá *krátkou pozici* (*short position*). Majitel opce je tedy v dlouhé pozici, ať je tato opce kupní či prodejní.

Opční deriváty se dále člení na:

- *opce*;
  - *opční listy*;
  - *stropy*;
  - *exotické opce*;
  - další typy opčních derivátů jako např. *opce na futures*, *swapce*, *kapce* aj.
- *Pevné* (či *nepodmíněné*) *deriváty* představují termínový obchod, který jsou oba účastníci povinni k datu splatnosti uskutečnit bez ohledu na to, jaká je k tomuto datu skutečná cena podkladového aktiva. Vstup do takového pevného termínového kontraktu (otevření pozice) je obvykle pro obě strany bezplatný. Podle používané terminologie účastník, který by měl k datu splatnosti koupit podkladové aktivum, zaujal *dlouhou pozici* (*long position*) a účastník, který by měl k datu splatnosti prodat podkladové aktivum, zaujal *krátkou pozici* (*short position*).

Pevné deriváty se dále člení na:

- *forwardy*;
- *futures*;
- *swapy*.

Jiné členění je možné podle typu podkladového aktiva na:

- *akciové deriváty*;
- *deriváty na akciový index*;
- *měnové deriváty*;
- *úrokové deriváty*;
- *komoditní deriváty*.

Někdy se v této souvislosti explicitně hovoří o finančních a nefinančních derivátech: nefinanční deriváty jsou komoditní deriváty s výjimkou derivátů na drahé kovy a vše ostatní jsou již finanční deriváty.

## 1. Opce v praxi

Opční transakce nejsou objevem posledních let; mají za sebou již mnohaletou tradici, největší v případě komoditních transakcí. Z minulosti jsou také známé opční transakce, které se týkaly akcií. Nová etapa rozvoje opcí v 70. letech spočívá především v rozvoji opčních transakcí devizových, opčních kontraktů na financial futures a v opčních operacích na obligace.

Opční obchody se začaly ve vyspělých státech rozvíjet po vzniku specializované opční burzy v Chicagu v roce 1973 (Chicago Board Options Exchange – CBOE). Různé druhy opčních transakcí se na burzách objevily počátkem 80. let. V roce 1981 začal obchod se standardizovanými opčními kontrakty, znějícími na obligace, a v roce 1982 se předmětem obchodu staly opční kontrakty na devizy a financial futures.

Kromě amerických burz měly v rozvoji těchto finančních inovací aktivní úlohu především burzy v Amsterdamu, Montrealu, Londýně, Paříži a v Sydney. Přes značné rozdíly v předmětu opčních transakcí je téměř stejná technika jejich realizace. Dnes se obchoduje na mnoha opčních burzách s opcemi standardizovaného typu, ale ještě ve větší míře na mimoburzovních (over-the-counter market; OTC) trzích s opcemi konstruovanými individuálně (např. pro klienty bank). V obou případech významně převládají úrokové opce.

*Opce* je termínový kontrakt mezi dvěma obchodními partnery, který dává *držiteli* (*kupující opce, holder*) v dlouhé pozici právo, ale ne povinnost, koupit nebo prodat stanovené bazické nástroje za předem fixovanou cenu k stanovenému datu nebo během stanovené doby, zatímco *upisovatel* (*prodávající, writer*) v krátké pozici se pasivně podřizuje rozhodnutí držitele opce. Vstup do dlouhé pozice proto není bezplatný jako u pevných derivátů, ale uskuteční se koupí opce za *opční prémii* (*cenu opce, option premium*). Podobně vstup do krátké pozice se uskuteční prodejem opce za zmíněnou opční prémii.

Podle techniky uzavírání opčních transakcí rozlišujeme:

- (a) *poptávkové opce* (*call options, kupní opce*);
- (b) *nabídkové opce* (*put options, prodejní opce*).

Kupující *call opce* získává právo nákupu stanoveného množství určitého bazického instrumentu v předem stanovené ceně a v přesně určeném termínu (nebo během stanovené

doby). Prodávající *call opce* je zavázán poskytnout na požádání majitele opce bazické instrumenty v souladu s podmínkami uzavřeného opčního kontraktu.

Kupující *put opce* získává právo prodeje stanoveného množství určitého bazického instrumentu v předem stanovené ceně a v přesně určeném termínu (nebo během stanovené doby). Prodávající *put opce* je zavázán na požádání majitele opce bazické instrumenty v souladu s podmínkami uzavřeného opčního kontraktu odebrat.

V době uzavření opčního kontraktu jsou sjednány všechny jeho náležitosti, tj.:

- *typ opce (call nebo put)*;
- *objem opce* je množství bazického instrumentu (podléhajícího či podkladového aktiva, underlying assets) v opčním kontraktu;
- *realizační cena (bazická cena, exercise price, strike price)* je cena, za kterou může držitel opce call (resp. put) koupit (resp. prodat) bazický instrument;
- *datum splatnosti opce (maturity date)* je datum plnění opce: přitom opci lze uplatnit buď pouze k datu splatnosti opce (tj. v jeden přesně stanovený den) a pak se mluví o *evropské opci (European option)*, nebo ji uplatnit kdykoliv do data splatnosti a pak se mluví o *americké opci (American option)*, která převládá v rámci burzovních opcí; přesněji se rozlišuje (1) *datum vypršení opce (expiration date)*, kdy opce opravdu vyprší, (2) *datum realizace opce (exercise date)* často shodné s datem vypršení, kdy proběhne sjednaná transakce s bazickým instrumentem, a (3) *datum zúčtování (settlement date)*, kdy dojde k vyúčtování provedené transakce.

Uplatnění opce nemusí být pro držitele vždy výhodné, ale jak již bylo řečeno opce představuje právo nikoliv povinnost, proto se držitel může rozhodnout zda příslušnou opci realizuje. Rozhodování držitele opce o její realizaci v daném čase  $t$  vychází z porovnání realizační ceny opce  $X$  s promptní cenou bazického instrumentu  $S_t$ . Přitom se říká, že daná opce je

- *na penězích (at-the-money)*, je-li realizační cena rovna ceně bazického instrumentu ( $X = S_t$ );
- *v penězích (in-the-money)*, je-li realizační cena pro držitele opce výhodnější než cena bazického instrumentu (tj.  $X < S_t$  u call, resp.  $X > S_t$  u put);
- *mimo peníze (out-of-the-money)*, je-li realizační cena pro držitele opce méně výhodná než cena bazického instrumentu (tj.  $X > S_t$  u call, resp.  $X < S_t$  u put).

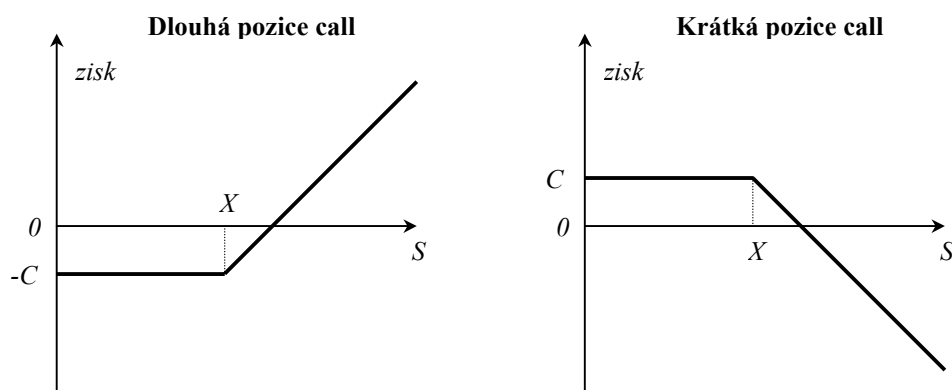
Na základě svého rozhodnutí pak držitel opce

- může uplatnit opci, tj. skutečně koupit (resp. prodat) podkladové aktivum; zřejmě uplatnění opce je výhodné pouze tehdy (a to ještě navíc s přihlédnutím k výši opční prémie a případných dalších transakčních poplatků), je-li opce v penězích;
- může prodat opci a tímto způsobem (podobně jako u futures) vyrovnat svou otevřenou dlouhou pozici (podobně jako u futures takto končí drtivá většina burzovních dlouhých opčních pozic);
- může nechat opci propadnout (pokud není opce do data splatnosti uplatněna, propadá bez jakéhokoliv plnění).

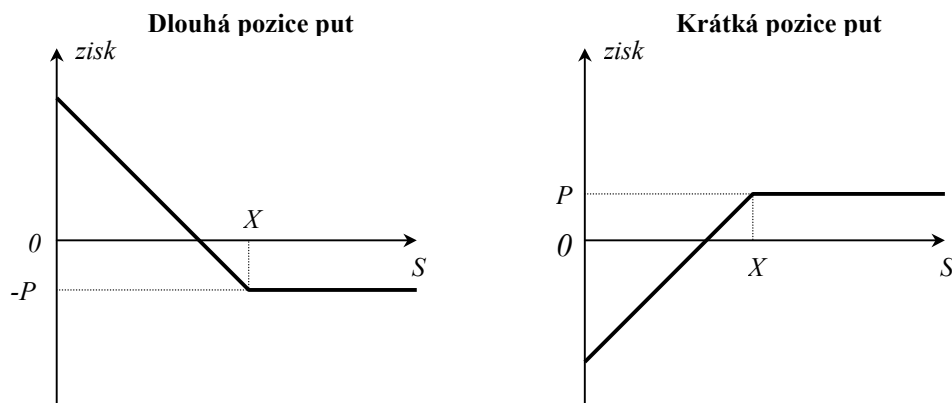
Upisovatel opce pak

- musí prodat (resp. koupit) podkladové aktivum za realizační cenu;
- může koupit prodanou opci a tímto způsobem vyrovnat svou otevřenou krátkou pozici.

Na obr. 1.1(a) a 1.1(b) je zobrazen zisk z opce call a put s realizační cenou  $X$  pro jejího držitele a upisovatele v závislosti na promptní ceně bazického instrumentu  $S$  (záporný zisk samozřejmě znamená ztrátu, přičemž jako u každého derivátu se jedná o hru s nulovým součtem: zisk držitele opce se rovná ztrátě jejího upisovatele a naopak). Přitom u americké opce se příslušný zisk může realizovat kdykoliv do data splatnosti opce  $T$  (tj.  $S = S_t$ , pro  $t < T$ ). Symbolem  $C$  (resp.  $P$ ) je označena opční prémie opce call (resp. put). Např. u dlouhé pozice call nastává pro  $S > X + C$  zisk, pro  $X < S < X + C$  omezená ztráta a pro  $S \leq X$  maximální ztráta. Ztráta u dlouhé pozice je vždy omezena opční prémie; totéž platí pro zisk u krátké pozice. Zisk u dlouhé pozice call je (teoreticky) neomezený a u dlouhé pozice put omezený hodnotou  $X - P$ ; totéž platí pro ztrátu u krátké pozice.



**Obr. 1.1(a)** Závislost zisku z opce call na promptní ceně bazického instrumentu



Obr. 1.1(b) Závislost zisku z opce put na promptní ceně bazického instrumentu

### Akciové opce

Jako první se na burzách objevily *opce na akcie (share options nebo stock options)*. Rozvoj těchto opčních transakcí začal na specializované burze v Chicagu v květnu 1973, kde byly dány do oběhu standardní opční kontrakty na akcie 18 amerických korporací. O další dva roky později vznikl opční obchod na dalších dvou amerických burzách: American Stock Exchange a Philadelphia Stock Exchange. Zpočátku se obchodovalo pouze s poptávkovými opcemi. Obchody s nabídkovými opcemi se začaly rozvíjet až po souhlasu Securities and Exchange Commission v roce 1977.

Mimo území USA se opční transakce objevily nejdříve v Sydney (Sydney Stock Exchange). V roce 1976 se opční obchod rozvinul v Torontu (Toronto Stock Exchange), Montrealu (Montreal Stock Exchange) a ve Vancouveru (Vancouver Stock Exchange). O tři roky později, v roce 1979, se začalo na kanadských burzách obchodovat s nabídkovými opcemi.

V Evropě se opční transakce objevily v roce 1978 v Amsterdamu (European Options Exchange) a později i na dalších evropských burzách.

Značný růst obchodů s opcemi na akcie vedl ke vzniku dalších typu opcí. V první řadě došlo k rozvoji dlužních opčních instrumentů, především obligací. V listopadu 1981 byly uvedeny na burzu v Amsterdamu opční kontrakty na obligace (*bond options contracts*). V roce 1982 se transakce tohoto typu začaly využívat na burze v Montrealu a později na London Stock Exchange. Předmětem burzovních kontraktů jsou především dlouhodobé obligace. Na American Stock Exchange se obchoduje také s krátkodobými cennými papíry

(13 týdenní pokladniční poukázky). Technika uzavírání a realizace opčních transakcí na obligace je shodná s opčními transakcemi na akcie.

### **Měnové opce**

Po počátečním rozvoji opcí na cenné papíry se v roce 1982 objevil nový typ opcí – *devizové opční transakce (currency options)*. Obchody s opcemi na devizy se uskutečňovaly především na amsterodamské burze European Options Exchange, ve Philadelphii (Philadelphia Stock Exchange), v Montrealu (Montreal Stock Exchange) i na nejdůležitějších londýnských burzách (London Stock Exchange, London International Financial Futures Exchange). Devizový opční kontrakt je dohoda, která je uzavřená mezi kupujícím a prodávajícím na parketu burzy, která dává majiteli opce právo na nákup nebo prodej stanoveného množství deviz za předem stanovený devizový kurs v určeném termínu. Na všech burzách jsou předmětem obchodu devizové opce na 3, 6 a 9 měsíců.

### **Opce na futures**

Teprve nedávno se na světových finančních trzích začalo obchodovat s *opcemi na financial futures (options on futures contracts)*. S tímto druhem opcí není spojena fyzická dodávka nebo odběr předmětu transakce. Vedle tohoto podstatného rozdílu oproti ostatním opcím jsou způsoby obchodování stejné. Zabezpečují účastníky burzovního obchodu před nebezpečím výkyvu cen. Všechny opční operace probíhají buď ve formě otevíracích transakcí (*opening transactions*), nebo uzavíracích transakcí (*closing transactions*). V prvním případě účastník burzovního obchodu otevírá nebo zvyšuje otevřenou pozici na trhu, v druhém případě nastává snížení nebo zlikvidování existující pozice.

Vzhledem k odlišným předmětům transakcí financial futures se rozlišují i různé opce na kontrakty futures:

- *opce na devizové kontrakty futures;*
- *opce na úročitelné kontrakty futures;*
- *opce na indexové kontrakty futures.*

Opce na devizové kontrakty futures se poprvé dostaly do oběhu na chicagské burze IMM v roce 1984. Zpočátku byly předmětem obchodu opce na kontrakty futures v DEM a od roku 1985 rovněž opce na kontrakty futures v anglických librách (GBP) a ve švýcarských francích (CHF).



O něco dříve se na burzách objevily opce na zúročitelné kontrakty futures. Již v roce 1982 se obchodovalo na CBT s opčními kontrakty financial futures, které byly založeny na státních obligacích.

V roce 1983 se na amerických burzách poprvé objevily opce na indexy futures. Poprvé to bylo na amerických burzách IMM, KCBT, NYFE, nebo CBOE. Tyto opce se v USA opírají především o index S&P 100 na CBOE. Po roce 1984 se v USA rozvinuly opce, které se opírají o index S&P 500 na burze IMM.

### **Opce na komodity**

Dalším příkladem opcí jsou opce, u kterých je jako podkladového aktiva užito komodity. Nejčastějším typem takového bazického instrumentu jsou kovy (zlato, stříbro, měď), zemědělské produkty (pšenice, sójové boby, pomerančový džus, káva, kakao a další) a ropné produkty (surová ropa, topný olej, zemní plyn, atd.)

### **Opce na akciový index**

Nejpopulárnější *indexové opce* jsou na S&P 100 a S&P 500. Opce na S&P 100 je evropského typu, opce na S&P 500 je amerického typu. Při uplatnění opce je vyrovnání provedeno v hotovosti, nikoliv doručením. Dalšími indexovými opcemi jsou např. NYSE Composite Index (všechny akcie na Americké akciové burze), DJIA index (obchoduje se teprve krátkou dobu, popularita však vzrůstá). Rovněž lze nalézt opce na specializované indexy jako Gold/Silver, Computer Technology, Semiconductor, Pharmaceutical, atd.

### **Úrokové opce**

*Úrokovými opcemi* se nazývají opce na vládní dluhopisy (*bondy*). Taková opce dává právo koupit (prodat) dluhopis v dohodnutém čase za dohodnutou cenu. Ve svém důsledku vede k zajištění úrokové míry. Úrokové opce jsou však mnohem méně likvidnější, než opce na úroková futures. Na CBOE se v současné době obchodují i opce na úrokovou míru.

### **Opční listy**

*Opční listy (warranty)* jsou opce call, které upisuje emitent k nákupu určitého počtu svých akcií (či případně jiných cenných papírů); opční list bývá často součástí dluhopisu (emitovaného akciovou společností), ale po oddělení se s ním obchoduje jako se samostatným cenným papírem. Počet opčních listů opravňujících k nákupu jedné akcie za realizační cenu se nazývá *opční poměr*. Držitel opčního listu nemá práva akcionáře, ale bývá

chráněn formou úprav realizační ceny proti případným změnám ceny bazické akcie způsobených např. výplatou dividend nebo štěpením akcií. Pro cenu opčního listu platí stejné zásady jako pro opční prémii. Má tedy speciálně svou vnitřní hodnotu (zisk plynoucí z uplatnění jednoho opčního listu jeho držitelem) a časovou hodnotu označovanou u opčních listů spíše jako *ážio* nebo *příplatek* (odměna, kterou je ochoten zaplatit kupec opčního listu za potenciální možnost, že během doby, kdy je možné list uplatnit, se cena bazické akcie změní v jeho prospěch, tj. odměna za možnost, že vzroste vnitřní hodnota opčního listu).

### **Stropy, dna a obojky**

Tyto instrumenty jsou mimoburzovní úrokové opce, které se využívají k průběžné ochraně proti nevýhodným pohybům úrokových měr u úvěrů a investic. Vznikají zřetězením klasických úrokových opcí přes úroková období (např. čtvrtletí), na jejichž konci se průběžně provádí případné plnění vyplývající z jednotlivých opcí. *Referenční sazbou* (tj. termínovou úrokovou mírou, s níž se srovnává sjednaná *realizační sazba* jako např. u úrokových forwardů FRA bývá velmi často LIBOR. Opční premie se udává v bazických bodech (tj. v 0,01 %) nominální hodnoty, na kterou je např. strop sjednán. Navíc nominální částka může být pevná nebo se průběžně měnit podle sjednaného schématu (např. klesat shodně s umořováním příslušného úvěru).

*Strop (cap)* vzniká řetězením klasických opcí call označovaných v této souvislosti jako *caplets*. Držitel stropu (pozice *long cap*) tedy vlastně sjednal s upisovatelem stropu (pozice *short cap*) dohodu, že překročí-li ve stanovených rozhodných dnech (např. vždy na začátku čtvrtletních úrokovacích obdobích) příslušná referenční sazba (např. LIBOR) sjednanou *cap sazbu*, musí upisovatel zaplatit držiteli příslušný úrokový rozdíl za dané úrokovací období vztážený na sjednanou nominální hodnotu. Za tuto výhodu, kterou si držitel vytvořil horní mez („strop“ ve výši *cap sazby*) pro referenční sazbu, musel ovšem upisovateli zaplatit příslušnou opční prémii.

*Dno (floor)* vzniká řetězením klasických opcí put označovaných v této souvislosti jako *floorlets*. Analogicky jako v případě stropu si držitel dna vytvořil dolní mez („dno“ ve výši *floor sazby*) pro referenční sazbu.

*Obojek (collar)* vzniká kombinací pozice *long cap* a pozice *short floor*. Jinými slovy držitel obojku dostává od upisovatele plnění ve formě úrokového rozdílu, pokud příslušná referenční sazba stoupne nad sjednanou *cap sazbu*, a poskytuje plnění upisovateli ve formě úrokového rozdílu, pokud referenční sazba klesne pod *floor sazbu*. Tímto způsobem lze např.

poměrně vysokou opční prémii vydanou na koupi stropu částečně kompenzovat opční premií získanou z prodeje dna.

### **Swapce a kapce**

*Swapce (swaption)* je opce na swap. Držitel swapce si za příslušnou opční premií zaplacenou upisovateli zajišťuje právo sjednat k datu (resp. do data) splatnosti swapce s upisovatelem swapovou smlouvu s předem sjednanými parametry (především s předem sjednanou realizační cenou, kterou je např. pevná úroková míra swapovaná za LIBOR v rámci úrokového swapu). Tímto způsobem si držitel swapce může např. zajistit dolní mez pro pevnou úrokovou míru swapovanou v rámci budoucího úrokového swapu.

*Kapce (caption)* je opce na strop, která se používá pro zajištění parametrů budoucího stropu (stejně jako swapce se používá pro zajištění parametrů budoucího swapu). Podobně existuje opce na dno a obojek.

## 2. Oceňování opcí

V této kapitole budou představeny základní oceňovací modely pro opce (evropské i americké) včetně slavného Black-Scholesova vzorce [viz Black&Scholes (1973); Hull (2002); Briys (1998)]. Teoretické výsledky vypočtené z těchto modelů se jako podpůrné informace přístupné z počítače na většině burz dobře osvědčují i v praxi. Pro názornost a jednoduchost je jejich odvození omezeno na případ akciových opcí.

### 2.1 Prémie, vnitřní hodnota opce, časová hodnota opce

Tržní cena, za kterou je opce sjednána na OTC trhu nebo obchodována na burzovním parketu se nazývá *opční premie (premium)*. V kurzovních lístcích se udává výše premie na jednu akcii. Výsledná hodnota premie je pak (nejčastěji) sto násobek této hodnoty. Opční premie tvoří horní hranici pro ztrátu držitele opce a pro zisk upisovatele opce. Skládá se ze dvou složek: vnitřní hodnoty a časové hodnoty.

$$\text{opční premie} = \text{vnitřní hodnota opce} + \text{časová hodnota opce}. \quad (2.1)$$

*Vnitřní hodnota opce (intrinsic value, IV)* v čase  $t$  je kladná část potenciálního zisku, který by plynul z okamžitého uplatnění opce v čase  $t$ . Tato hodnota má hlavně teoretický význam (zvláště pro evropské opce, u kterých není předčasné uplatnění možné). Závisí pouze na vztahu promptního kursu bazického instrumentu  $S_t$  v čase  $t$  a realizační ceny opce  $X$ . Označíme-li vnitřní hodnotu opce v čase  $t$  symbolem  $IV_t$ , pak zřejmě platí pro opci call

$$IV_t^C = \max(0, S_t - X) \quad (2.2)$$

a pro opci put

$$IV_t^P = \max(0, X - S_t). \quad (2.3)$$

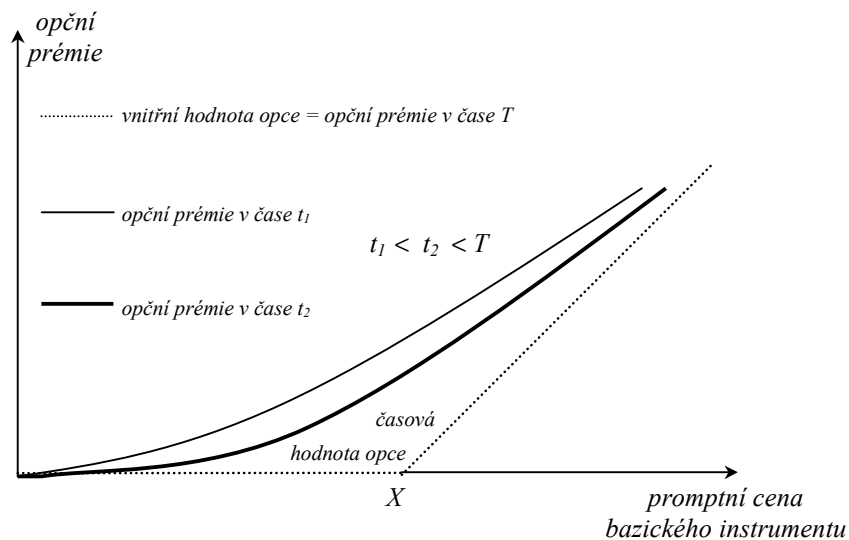
V tab. 2.1 je schematicky popsán směr závislosti  $IV_t$  na  $S_t$  a  $X$ , kdy symbol  $\uparrow$  (resp.  $\downarrow$ ) značí růst (resp. pokles) příslušné hodnoty.

		Změna vnitřní hodnoty opce	
		call	put
$S_t$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$
$X$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

**Tab. 2.1** Směr závislosti vnitřní hodnoty opce na promptní ceně bazického instrumentu a realizační ceně opce

*Časová hodnota opce (time value)* v čase  $t$  je vlastně investory oceněná šance, že v době, která ještě zbývá do expirace, podkladová akcie poroste (u call opce) nebo poklesne

v ceně (u put opce), tj. oceněná možnost, potencionálního růstu vnitřní hodnoty opce. Se zkracující se dobou do splatnosti (tj. s růstem  $t$ ) časová hodnota opce klesá až na nulovou hodnotu při  $t = T$  ( $T$  označuje datum splatnosti opce), neboť pravděpodobnost příznivé cenové změny bazického instrumentu se zkracující se dobou do splatnosti klesá (viz obr. 2.1).



**Obr. 2.1** Závislost opční prémie, vnitřní hodnoty opce a časové hodnoty opce na promptní ceně bazického instrumentu

Zatímco vnitřní hodnota opce je dána funkcionálním vztahem (2.2) resp. (2.3), časovou hodnotu opce ovlivňuje mnoho různých faktorů a navíc u řady z nich nekvantifikovatelným způsobem, takže je nutné postupovat aproximativně. Úspěšně se s aproximativním funkcionálním vyjádřením časové hodnoty opce (a tím i opční prémie) vyrovnává známý Blackův-Scholesův vzorec, který byl původně odvozen pro evropskou opci na akcii nevyplácející dividendy. Jako faktory ovlivňující časovou hodnotu takové opce používá tento vzorec následující proměnné [viz Hull (1991); Briys (1998); Cipra (2000)]:

- *vztah mezi promptní cenou akcie  $S_t$  a realizační cenou opce  $X$* : s růstem  $|S_t - X|$  časová hodnota opce klesá (např. při růstu kladného rozdílu  $S_t - X$  u opce call se v důsledku růstu vnitřní hodnoty stává tato opce dražší a tedy méně atraktivní pro zakoupení, což se projeví poklesem její časové hodnoty);
- *doba do splatnosti opce  $T - t$* : s rostoucí dobou do splatnosti časová hodnota opce roste (s rostoucí dobou do splatnosti roste pravděpodobnost toho, že během doby do splatnosti opce se cena bazického instrumentu změní ve prospěch držitele opce, což se projeví růstem časové hodnoty této opce);
- *volatilita ceny akcie  $\sigma$* : s rostoucí volatilitou ceny akcie časová hodnota opce roste (čím více kolísá kurs akcie, tím větší je pravděpodobnost toho, že uplatnění opce bude pro jejího držitele výhodné, což se projeví růstem časové hodnoty této opce);

- *bezriziková úroková míra  $r$* : s rostoucí bezrizikovou úrokovou mírou časová hodnota opce call (resp. put) roste (resp. klesá) (např. držitel opce call zaplatí realizační cenu za akcii až v okamžiku uplatnění opce a příslušný kapitál mu do doby splatnosti přináší úrok, takže vyšší úroková míra se projeví vyšší časovou hodnotou této opce).

Tento výčet jak už bylo výše naznačeno není v žádném případě úplný. Vypozorování souvislostí mezi dalšími faktory (objektivními i subjektivními) a hodnotou opce je ale většinou velmi obtížné, špatně kvantifikovatelné a prakticky nepoužitelné. Přesto za další faktory, které ovlivňují hodnotu call opce, byť pouze okrajově a zprostředkovaně, můžeme uvést:

- *daňové zákony*: změna zdanění nejen opcí, ale i ostatních finančních nástrojů;
- *tržní podmínky*: změna tržních podmínek bude mít zajisté vliv na hodnotu opcí. Jde především o systém marží a o další transakční náklady;
- *investorova averze k riziku*: každý investor má obecně jiný postoj k riziku, podle toho také bude oceňovat jednotlivé opce;
- *regulační podmínky*: institucionální investoři (banky, pojišťovny, investiční a podílové fondy,...) jsou vždy omezováni svými regulátory (ČNB, ministerstvy, komisemi) v investování do derivátů. Změna těchto regulí má vliv na hodnotu derivátů.

V tab. 2.2 je opět schematicky popsán směr závislosti časové hodnoty opce na uvedených kvantifikovatelných faktorech (z B-S modelu). V případě, že akcie vyplácí dividendy během doby do expirace opce, pak dochází ke zvýhodnění majitele akcie, což se projeví nižší (resp. vyšší) časovou hodnotou opce call (resp. put) ve srovnání s případem akcie nevyplácející dividendy.

		Změna časové hodnoty opce	
		call	put
$ S_t - X $	↑	↓	↓
$T - t$	↑	↑	↑
$\sigma$	↑	↑	↑
$r$	↑	↑	↓

**Tab. 2.2** Směr závislosti časové hodnoty opce na některých faktorech (evropské opce na akcii nevyplácející dividendy)

## 2.2 Hraniční vlastnosti opcí

Ocenění opčního práva, tedy stanovení premie pro call či put opci, provádějí různé opční teorie. Do dnešní doby jich bylo vyvinuto několik. Tyto teorie nejsou bohužel zcela jednoduché, používají složitější matematický aparát na úrovni diferenciálního počtu a teorie pravděpodobnosti. Avšak nejdůležitější opční vlastnosti lze kvantifikovat pomocí jednoduchých matematických vztahů.

Pro opční premii  $C_t$  (resp.  $P_t$ ) opce call (resp. put) na akcii nevyplácející dividendy je tedy možné odvodit některé meze (hranice) limitující opční premii shora i zdola. Pro odvození se využívají argumenty eliminující arbitrážní bezrizikový zisk (obdobně jako při oceňování i jiných derivátů např. forwardů), přičemž pro zjednodušení se používá spojitě úročení.

V případě *evropské opce call na akcii nevyplácející dividendy* pak platí

$$\max(S_t - Xe^{-r(T-t)}, 0) \leq C_t \leq S_t. \quad (2.4)$$

Vyplývá to z následujících úvah:

- Nerovnost  $C_t \geq 0$  je zřejmá: Opce je právo. Upisovatel nebude ochoten poskytovat opční možnost a ještě k tomu přidávat opční premii. Na druhou stranu pro majitele nezakládá žádnou povinnost v budoucnu cokoli udělat či cokoli platit. Toto právo může být v nejhorším případě bezcenné, tedy mít nulovou hodnotu.
- Nerovnost  $C_t \leq S_t$  je rovněž zřejmá: kdyby byla opční premie vyšší než promptní cena podkladové akcie, pak by bylo výhodnější koupit přímo akcii.
- Nerovnost  $C_t \geq S_t - Xe^{-r(T-t)}$  lze dokázat následujícím způsobem. Uvažujme (1) portfolio tvořené uvažovanou akcií a (2) portfolio tvořené evropskou opcí call na uvažovanou akcii a částkou  $Xe^{-r(T-t)}$ . Zřejmě v čase  $T$  má portfolio (1) hodnotu  $S_T$  a portfolio (2) hodnotu  $\max(S_T, X)$ . Protože  $S_T \leq \max(S_T, X)$  a uvažovaná evropská opce nemůže být uplatněna předčasně, musí i v čase  $t$  pro hodnoty těchto portfolií platit  $S_t \leq C_t + Xe^{-r(T-t)}$ , což je shodné s dokazovanou nerovností.

Analogicky pro *evropskou opci put na akcii nevyplácející dividendy* platí

$$\max(Xe^{-r(T-t)} - S_t, 0) \leq P_t \leq Xe^{-r(T-t)}. \quad (2.5)$$

Vyplácí-li akcie dividendy a označíme-li symbolem  $D_t$  počáteční hodnotu (v čase  $t$ ) dividend vyplácených do splatnosti opce, pak snadnou modifikací (2.4) platí pro *evropskou opci call na akcii vyplácející dividendy*

$$\max(S_t - Xe^{-r(T-t)} - D_t, 0) \leq C_t \leq S_t - D_t \quad (2.6)$$

a modifikací (2.5) platí pro *evropskou opci put na akcii vyplácející dividendy*

$$\max(Xe^{-r(T-t)} - S_t + D_t, 0) \leq P_t \leq Xe^{-r(T-t)} + D_t. \quad (2.7)$$

Pro americkou opci call na akcii nevyplácející dividendy je opční prémie (a tedy i nerovnost (2.4) shodná s opční premií odpovídající evropské opce. Platí totiž:

- Protože americká opce v sobě jako speciální případ zahrnuje odpovídající evropskou opci, nemůže být cena americké opce nižší než cena evropské opce.
- Kdyby cena americké opce byla vyšší než cena evropské opce, pak by muselo dle (2.4) zřejmě  $C_t \geq S_t - Xe^{-r(T-t)} > S_t - X$ , kde  $S_t - X$  je zisk z předčasného uplatnění opce, bylo by místo předčasného uplatnění opce výhodnější tuto opci prodat. Možnost předčasného uplatnění americké opce call tedy nepředstavuje pro jejího držitele žádnou výhodu.

Překvapivě odlišná je situace pro *americkou opci put na akcii nevyplácející dividendy*, jejíž opční prémie může být nejen rovna, ale i ostře větší než opční prémie odpovídající evropské opce. Předčasná realizace americké opce put je totiž někdy pro jejího držitele výhodné: částka  $X$  získaná předčasným uplatněním takové opce se během zbývající doby do expirace zhodnotí na částku  $Xe^{r(T-t)}$ , která může být vyšší než částka  $\max(S_T, X)$  získaná bez předčasného uplatnění opce. Nerovnost (2.5) přechází do tvaru

$$\max(X - S_t, 0) \leq P_t \leq X. \quad (2.8)$$

V případě akcie vyplácející dividendy již neplatí ani pro americkou opci call na takovou akcii, že bude jednoznačně nevýhodné uplatnit ji předčasně.

### 2.3 Put-call parita

Termínem *put-call parita* se označuje vztah mezi opčními premiemi navzájem si odpovídajících opcí call a put (tj. se stejným bazickým instrumentem, stejnou realizační cenou a stejnou dobou do splatnosti. Používá se např. pro výpočet opční prémie nebo odvození vlastností opce put na základě vypočtené opční prémie nebo odvozených vlastností opce call.

Put-call parita má následující tvar

- pro *evropské opce na akcii nevyplácející dividendy*:

$$P_t = C_t + Xe^{-r(T-t)} - S_t; \quad (2.9)$$



Pro odvození vztahu (2.9) stačí uvažovat portfolio (A) tvořené evropskou opcí put na uvažovanou akcii a touto akcií; portfolio (B) tvořené evropskou opcí call na uvažovanou akcii a částkou  $Xe^{-r(T-t)}$ . Zřejmě v čase  $T$  mají obě portfolia stejnou hodnotu  $\max(S_T, X)$ . Protože obě uvažované opce jsou evropské a nemohou být tedy uplatněny předčasně, musí i v čase  $t$  pro hodnoty těchto portfolií platit  $P_t + S_t = C_t + Xe^{-r(T-t)}$ , což je shodné s dokazovanou rovností.

– pro evropské opce na akcii vyplácející dividendy:

$$P_t = C_t + Xe^{-r(T-t)} - S_t + D_t ; \quad (2.10)$$

Pro odvození vztahu (2.10) opět stačí uvažovat portfolio (A) tvořené evropskou put opcí na uvažovanou akcii a touto akcií; portfolio (B) tvořené evropskou opcí call, částkou  $Xe^{-r(T-t)}$  a např. bezrizikovým diskontním dluhopisem  $D_t$  ( $D_t$  odpovídá současné hodnotě dividend, které budou vyplaceny v průběhu života opce). Zřejmě v čase  $T$  mají obě portfolia stejnou hodnotu  $\max(S_T, X) + D_t e^{r(T-t)} = \max(S_T, X) + D_T$ . Protože obě uvažované opce jsou evropské a nemohou být tedy uplatněny předčasně, musí i v čase  $t$  pro hodnoty těchto portfolií platit  $P_t = C_t + Xe^{-r(T-t)} - S_t + D_t$ , což je shodné s dokazovanou rovností.

– pro americké opce na akcii nevyplácející dividendy:

$$S_t - X \leq C_t - P_t \leq S_t - Xe^{-r(T-t)} ; \quad (2.11)$$

– pro americké opce na akcii vyplácející dividendy:

$$S_t - X - D_t \leq C_t - P_t \leq S_t - Xe^{-r(T-t)} . \quad (2.12)$$

Odvození vztahů (2.11) a (2.12) je poněkud komplikovanější, neboť americké opce mohou být principiálně uplatněny kdykoliv v průběhu jejich života.

## 2.4 Blackův-Scholesův vzorec pro opční prémii

Blackův-Scholesův [viz Black&Scholes (1973); Briys (1998); Cipra (2000); Hull (1993)] vzorec vyjadřuje matematicky opční prémii jako funkci pěti proměnných:  $S_t$  (promptní cena bazické akcie),  $X$  (realizační cena akcie),  $T - t$  (doba do splatnosti obce),  $\sigma$  (volatilita ceny akcie) a  $r$  (bezriziková úroková míra). Opční prémie stanovená výpočetně pomocí oceňovacích opčních modelů tohoto typu se nazývá *teoretická opční prémie (fair option premium)* a v praxi se využívá jako přijatelná aproximace skutečné opční prémie. Při

odvozování základního tvaru Blackova-Scholesova vzorce pro opční prémii  $C_t$  a  $P_t$  evropských opcí na akcii nevyplácející dividendy se využívá model akciových cen založený na markovském procesu.

Nejčastěji využívaným markovským procesem je *Wienerův proces* (a to nejen ve financích: např. ve fyzice se pod označením Brownův pohyb používá k modelování pohybu malé částice vystavené nárazům molekul prostředí, ve kterém se pohybuje). Aby se nějaká veličina  $z$  řídila Wienerovým procesem, musí splňovat dva předpoklady, které lze vyjádřit pomocí přírůstku  $\Delta z$  této veličiny v krátkých časových intervalech  $\Delta t$ .

$$\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t) \quad (2.13)$$

V následujících úvahách pak přecházejí intervaly  $\Delta t$  na infinitezimální intervaly  $dt$  nekonečně malé délky. Tyto předpoklady mají následující tvar:

(1) Mezi libovolnými odpovídajícími si přírůstky  $\Delta z$  a  $\Delta t$  platí vztah

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} , \quad (2.14)$$

kde  $\varepsilon$  je náhodná veličina se standardizovaným normálním rozdělením  $N(0; 1)$ .

(2) Přírůstky  $\Delta z$  pro libovolné disjunktní přírůstky  $\Delta t$  jsou navzájem nezávislé.

Z předpokladu (1) plyne, že také přírůstek  $\Delta z$  má normální rozdělení s momenty

$$E(\Delta z) = 0 , \quad (2.15)$$

$$\text{var}(\Delta z) = \Delta t , \quad (2.16)$$

$$\sigma(\Delta z) = \sqrt{\Delta t} . \quad (2.17)$$

Z předpokladu (2) plyne, že Wienerův proces je skutečně markovský.

Předchozí vlastnosti se dají nyní přenést na přírůstky  $z(T) - z(0)$  Wienerova procesu přes delší časové intervaly. Po rozdělení intervalu  $(0, T)$  na  $N$  krátkých intervalů stejné délky  $\Delta t$  (stačí zvolit  $N = T/\Delta t$ ), lze psát

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} , \quad (2.18)$$

kde  $\varepsilon_i$  jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny s rozdělením  $N(0; 1)$ .

Odtud již plyne, že také přírůstek  $z(T) - z(0)$  má normální rozdělení s momenty

$$E[z(T) - z(0)] = 0 , \quad (2.19)$$

$$\text{var}[z(T) - z(0)] = N \cdot \Delta t = T , \quad (2.20)$$

$$\sigma[z(T) - z(0)] = \sqrt{T} . \quad (2.21)$$

Speciálně je vidět, že rozptyl přírůstku Wienerova procesu je roven přímo délce odpovídajícího časového intervalu. Jestliže tedy např. Wienerův proces nabývá nyní hodnoty 5, pak má po jednom roce rozdělení  $N(5; 1)$ , po dvou letech rozdělení  $N(5; 2)$  atd.

V klasickém deterministickém kalkulu se v přírůstcích typu  $\Delta y/\Delta x$  provádí limitní přechod  $\Delta x \rightarrow 0$  k infinitezimálním hodnotám  $dy/dx$ . Podobně také u Wienerova procesu při  $\Delta t \rightarrow 0$  přechází (1.14) do tvaru

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt} . \quad (2.22)$$

Pomocí Wienerova procesu  $z$  lze definovat *zobecněný Wienerův proces*  $x$  jako

$$dx = a dt + b dz , \quad (2.23)$$

kde  $a$  je *trendový koeficient (drift rate)* a  $b$  je *difúzní koeficient (diffusion rate)*. Význam koeficientů je velice názorný: Uvažujeme-li nejprve situaci s  $b = 0$ , tj.  $dx = a dt$ , pak při dané počáteční hodnotě  $x(0) = x_0$  je řešením této deterministické diferenciální rovnice zřejmě přímka  $x = x_0 + at$  se směrnici  $a$ . Při nenulovém  $b$  je nyní na tuto přímku nabalena stochastická složka (šum) ve výši  $b$ -násobku Wienerova procesu. Jestliže se vrátíme k diskrétním časovým přírůstkům  $\Delta t$ , pak (2.23) lze zapsat jako

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t} , \quad (2.24)$$

přičemž přírůstek  $\Delta x$  má zřejmě normální rozdělení s momenty

$$E(\Delta x) = a\Delta t , \quad (2.25)$$

$$\text{var}(\Delta x) = b^2 \Delta t , \quad (2.26)$$

$$\sigma(\Delta x) = b\sqrt{\Delta t} . \quad (2.27)$$

Analogicky jako dříve také přírůstek  $x(T) - x(0)$  přes delší časový interval má normální rozdělení s momenty

$$E[x(T) - x(0)] = aT , \quad (2.28)$$

$$\text{var}[x(T) - x(0)] = b^2 T , \quad (2.29)$$

$$\sigma[x(T) - x(0)] = b\sqrt{T} . \quad (2.30)$$

Koeficient  $a$  tedy speciálně představuje nárůst trendu a koeficient  $b$  nárůst směrodatné odchylky zobecněného Wienerova procesu během časové jednotky. Jestliže tedy např. zobecněný Wienerův proces s koeficienty  $a = 0,3$  a  $b = 1,5$  nabývá nyní hodnoty 5, pak má po půl roce rozdělení  $N(5,15; 1,06)$ , neboť  $5 + 0,3 \cdot 0,5 = 5,15$  a  $1,5 \cdot 0,5^{1/2} = 1,06$ .

Zobecněný Wienerův proces  $x$ , jehož trendový a difúzní koeficient nejsou v čase konstantní, ale závisejí na hodnotě tohoto procesu  $x$  a na čase  $t$  se někdy nazývá *difúzní proces*

$$d x = a(x, t) d t + b(x, t) d z \quad (2.31)$$

s trendovým koeficientem  $a(x, t)$  a difúzním koeficientem  $b(x, t)$ . K difúznímu procesu (2.31) se váže slavné Itoovo lemma využívané nejen v obecném stochastickém kalkulu, ale také při oceňování finančních derivátů.

### Itoovo lemma [ Itô (1951)]

Uvažujme spojitou a diferenciovatelnou funkci  $G$  proměnné  $x$ . Pokud  $\delta x$  je malá změna v  $x$  a  $\delta G$  je výsledná malá změna v  $G$ , platí následující vztah

$$\delta G \approx \frac{dG}{dx} \delta x . \quad (2.32)$$

Jinými slovy,  $\delta G$  je aproximativně rovno míře změny  $G$  podle  $x$  krát  $\delta x$ . Chyba zahrnuje výrazy řádu  $\delta x^2$ . Pokud bychom vyžadovali větší preciznost lze (2.32) nahradit Taylorovým

$$\text{polynomem } \delta G = \frac{dG}{dx} \delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 G}{dx^2} \delta x^2 + \frac{d^3 G}{dx^3} \delta x^3 + \dots$$

Pro spojitou a diferenciovatelnou funkci  $G$  dvou proměnných  $x$  a  $y$  analogicky k (2.32) platí,

$$\text{že } \delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y \quad (2.33)$$

a tedy rozšířený Taylorův polynom nabývá tvaru

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \delta x \delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \delta y^2 \dots \quad (2.34)$$

V limitním případě, kdy  $\delta x$  a  $\delta y$  se blíží nule, rovnice (2.34) přechází do tvaru

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy . \quad (2.35)$$

Nyní předpokládejme, že se proměnná  $x$  řídí Itoovým procesem (viz rovnice(1.31))

$$d x = a(x, t) d t + b(x, t) d z \quad (2.36)$$

a že  $G$  je funkcí  $x$  a času  $t$ . Analogicky k rovnici (2.34) můžeme psát

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \delta x \delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \delta t^2 \dots \quad (2.37)$$

Rovnici (2.36) lze přepsat do tvaru  $\delta x = a(x, t)\delta t + b(x, t)\varepsilon\sqrt{\delta t}$ , nebo po vynechání proměnných do přehlednější formy

$$\delta x = a \delta t + b \varepsilon \sqrt{\delta t}. \quad (2.38)$$

Tato rovnice odhaluje důležitý rozdíl mezi situací v rovnici (2.37) a situací v rovnici (2.34). Po limitním přechodu z rovnice (2.34) do rovnice (2.35) byly vynechány výrazy obsahující  $\delta x^2$ , neboť se jedná o výrazy druhého řádu. Z rovnice (2.38) dostáváme

$$\delta x^2 = b^2 \varepsilon^2 \delta t + \text{výrazy vyššího řádu u } \delta t. \quad (2.39)$$

Toto naznačuje, že výraz obsahující  $\delta x^2$  v rovnici (2.37) má komponentu, která je řádu  $\delta t$  a nelze ji ignorovat.

Rozptyl standardizovaného normálního rozdělení je 1. To znamená, že  $E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$ , kde  $E$  značí očekávanou (střední) hodnotu. Protože  $E(\varepsilon) = 0$ , platí, že  $E(\varepsilon^2) = 1$ . Očekávaná hodnota výrazu  $\varepsilon^2 \delta t$  je tudíž  $\delta t$ . Lze dokázat, že rozptyl výrazu  $\varepsilon^2 \delta t$  je řádu  $\delta t^2$ . Důsledkem toho je, že výraz  $\varepsilon^2 \delta t$  lze považovat za nestochastický, rovný své očekávané hodnotě  $\delta t$ , když  $\delta t$  se blíží nule. A tedy z rovnice (2.39) plyne, že i výraz  $\delta x^2$  se stává nestochastický, roven  $b^2 \delta t$ . Jinými slovy, pokud  $\delta x, \delta y \rightarrow 0$  platí, že

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt, \quad (2.40)$$

a tuto rovnost nazýváme „*Itoovo lemma*“. Pokud  $dx$  substituujeme rovnicí (2.36), pak (2.40) přechází do tvaru

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + b \frac{\partial G}{\partial x} dz. \quad (2.41)$$

Tedy podle *Itoova lemmatu* platí pro libovolnou dostatečně hladkou funkci  $G$  difúzního procesu  $x$  a času  $t$  vztah

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial t} + a \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial G}{\partial x} dz \quad (2.42)$$

Matematicky přesněji by mělo místo  $G$ ,  $a$ ,  $b$  být napsáno  $G(x,t)$ ,  $a(x,t)$ ,  $b(x,t)$ . Libovolná funkce difúzního procesu je tedy také difúzní proces s trendovým koeficientem

$$\frac{\partial G}{\partial t} + a \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \quad (2.43)$$

a difúzním koeficientem

$$b \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (2.44)$$

### Zobecněný Wienerův proces pro tržní cenu akcie

Jestliže tržní cenu akcie v čase  $t$  označíme jako  $P$  (pro jednoduchost, se předpokládá, že akcie nevyplácí dividendy), pak příslušný zobecněný Wienerův proces (2.23) se v této souvislosti většinou aplikuje ve tvaru

$$dP = \mu P dt + \sigma P dz, \quad (2.45)$$

kde interpretujeme  $\mu$  jako (spojitou) míru zisku plynoucího ze změn tržní ceny akcie a  $\sigma$  jako volatilitu (riziko) tržní ceny akcie kvantifikující kolísání této ceny. Po přepsání (2.45) do přírůstkového tvaru (viz (1.24))

$$\Delta P = \mu P \Delta t + \sigma P \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (2.46)$$

( $\varepsilon \sim N(0; 1)$ ), pak zřejmě trendový koeficient  $\mu P$  zobecněného Wienerova procesu (2.45) má význam středního přírůstku tržní ceny akcie za jednotku času a difúzní koeficient  $\sigma P$  má význam směrodatné odchylky tohoto přírůstku:

$$E(\Delta P) = \mu P \Delta t, \quad (2.47)$$

$$\text{var}(\Delta P) = \sigma^2 P^2 \Delta t, \quad (2.48)$$

$$\sigma(\Delta P) = \sigma P \sqrt{\Delta t}. \quad (2.49)$$

samozeřejmě takové přírůstkové vyjádření je pouze aproximativní: např. řešení diferenciální rovnice (2.45) ve spojitém čase při nulové volatilitě (tj.  $dP = \mu P dt$ ) má exponenciální tvar

$$P = P_0 e^{\mu t}, \quad (2.50)$$

kde  $P_0$  je tržní cena akcie v čase  $t = 0$  (tržní cena akcie se tedy v tomto deterministickém případě zhodnocuje formou spojitého úročení s úrokovou mírou  $\mu$ ).

Základní model (2.45) se také často přepisuje do tvaru pro poměrné přírůstky tržní ceny akcie

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dz. \quad (2.51)$$

### Logaritmicko-normální model pro tržní cenu akcie

Aplikujeme-li na zobecněný Wienerův proces pro tržní cenu akcie (2.45) Itoova lemma (2.42) dostáváme

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial t} + \mu P \frac{\partial G}{\partial P} + \frac{1}{2} \sigma^2 P^2 \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} \right) dt + \sigma P \frac{\partial G}{\partial P} dz, \quad (2.52)$$

kde za funkci  $G$  vezmeme

$$G = \ln P. \quad (2.53)$$

Protože

$$\frac{\partial G}{\partial P} = \frac{1}{P}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial P^2} = -\frac{1}{P^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0,$$

dostaneme po dosazení do (2.52)

$$d \ln P = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz. \quad (2.54)$$

Protože  $\mu$  a  $\sigma$  jsou konstantní, řídí se tedy také  $\ln P$  zobecněným Wienerovým procesem s trendovým koeficientem  $\mu - \sigma^2 / 2$  a difúzním koeficientem  $\sigma$ .

Při použití aproximativního přírůstkového vyjádření pro změnu  $\ln P$  v čase  $t$  na  $\ln P_T$  v nějakém budoucím čase  $T$  ( $t < T$ ) dostaneme pro tento přírůstek

$$\ln P_T - \ln P \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right) \quad (2.55)$$

nebo ekvivalentně

$$\ln P_T \sim N \left( \ln P + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \sigma^2 (T - t) \right). \quad (2.56)$$

Protože přirozený logaritmus tržní ceny akcie má podle (2.56) normální rozdělení, řídí se v rámci tohoto modelu tržní cena akcie logaritmicko normálním rozdělením. Navíc vzhledem k tomu, že směrodatná odchylka  $\ln P_T$  je lineární funkcí  $\sqrt{(T-t)}$ , vzrůstá nejistota ohledně budoucího chování logaritmu tržní ceny akcie úměrně s odmocninou časového horizontu, pro který toto chování předpovídáme.

Z vlastností logaritmicko-normálního rozdělení (je-li  $X \sim \text{LN}(\mu, \sigma^2)$ , pak  $E(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$  a  $\text{var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2) \cdot [\exp(\sigma^2) - 1]$ ) můžeme snadno odvodit momenty tržní ceny akcie, především střední hodnotu

$$E(P_T) = P e^{\mu(T-t)} \quad (2.57)$$

a rozptyl

$$\text{var}(P_T) = P^2 e^{2\mu(T-t)} \left( e^{\sigma^2(T-t)} - 1 \right). \quad (2.58)$$

Množství literatury je věnováno numerickému odhadu trendového parametru  $\mu$  a volatility  $\sigma$  tržní ceny akcie. Klasický přístup pomocí popisné statistiky je následující:

K dispozici pro takový odhad jsou obvykle tržní ceny dané akcie  $P_\tau$  na koncích časových intervalů stejné délky  $\Delta t$  ( $\tau = 0, 1, \dots, N$ ). Často se jedná o uzavírací akciové kursy na koncích jednotlivých obchodních dní. Jestliže označíme

$$i_\tau = \ln\left(\frac{P_\tau}{P_{\tau-1}}\right) = \ln P_\tau - \ln P_{\tau-1} = \ln(1 + I_\tau) \quad (2.59)$$

( $\tau = 0, 1, \dots, N$ ), pak klasickým odhadem směrodatné odchylky hodnot  $i_\tau$  je

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{\tau=1}^N (i_\tau - \bar{i})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{\tau=1}^N i_\tau^2 - \frac{1}{N(N-1)} \left( \sum_{\tau=1}^N i_\tau \right)^2}, \quad (2.60)$$

kde

$$\bar{i} = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N i_\tau. \quad (2.61)$$

Protože podle (2.55) je směrodatná odchylka  $i_\tau$  rovna  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ , nabízí se jako odhad volatility  $\sigma$

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} \quad (2.62)$$

s aproximativní směrodatnou odchylkou  $s/\sqrt{2N\Delta t}$ . Trendový koeficient  $\mu$  pak opět vzhledem k (2.55) lze odhadnout jako

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{i} + s^2/2}{\Delta t}. \quad (2.63)$$

Jestliže časový interval týkající se hodnoty  $i_\tau$  zahrnuje datum ex-dividenda (a tím pádem výplatu dividendy), pak je nutné příslušnou dividendu  $D_\tau$  zohlednit ve výpočtu jako

$$i_\tau = \ln\left(\frac{P_\tau + D_\tau}{P_{\tau-1}}\right). \quad (2.64)$$

Cenu akcie lze podle (2.45) modelovat jako

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.65)$$

(místo symbolu  $P$  je použit pro cenu akcie symbol  $S$ , neboť akcie nyní vystupuje jako bazický instrument derivátu,  $\mu$  je (spojitá) míra zisku akcie a  $\sigma$  je volatilita ceny akcie; pro jednoduchost jsou vynechány časové indexy). Protože opční prémie call  $C_t$  je mimo jiné funkcí  $S_t$  a  $t$ , dostaneme podle Itoova lemmatu (2.42)



$$dC = \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} dz. \quad (2.66)$$

Oba vztahy (2.65) a (2.66) lze přepsat do přírůstkového tvaru

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z, \quad (2.67)$$

$$\Delta C = \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial C}{\partial S} \Delta z. \quad (2.68)$$

Uvažujme portfolio tvořené krátkou pozicí call na uvažovanou akcii a  $\partial C / \partial S$  kusy této akcie (předpokládáme přitom, že akcie je neomezeně dělitelná). Cena tohoto portfolio je tedy

$$P = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S \quad (2.69)$$

a její přírůstek během časového intervalu  $\Delta t$  lze vyjádřit pomocí (2.67) a (2.68) jako

$$\Delta P = -\Delta C + \frac{\partial C}{\partial S} \Delta S = \left( -\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta t. \quad (2.70)$$

Konstrukce portfolio předchozím způsobem byla motivována snahou vyloučit z jeho přírůstkového vztahu náhodný člen (ze vztahu (2.70) opravdu vypadl člen s přírůstkem Wienerova procesu  $\Delta z$ ). Tím pádem se toto portfolio chová deterministicky (tj. bezrizikově) a k popisu jeho zhodnocování lze použít bezrizikovou úrokovou míru  $r$

$$\Delta P = P \cdot r \Delta t. \quad (2.71)$$

Porovnáním (2.70) a (2.71) s využitím (2.69) dostaneme tzv. *Blackovu-Scholesovu diferenciální rovnici* pro  $C_t$  ve tvaru

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \quad (2.72)$$

s okrajovou podmínkou

$$C_T = \max(S_T - X, 0) \quad (2.73)$$

(tato rovnice platí obecně pro hodnotu libovolného derivátu na akcii nevyplácející dividendy, tedy např. i pro hodnotu dlouhé pozice forwardu  $f_t$  na takovou akcii).

Elegantní způsob řešení rovnice (2.72) spočívá v transformaci na ekvivalentní (i když hypotetický) problém, který je neutrální vůči riziku. Taková transformace je možná díky tomu, že uvažovaná rovnice (2.72) neobsahuje žádný faktor, který by závisel na rizikových preferencích investora (střední přírůstek ceny akcie za časovou jednotku  $\mu S$ , který roste s rostoucí averzí vůči riziku, zřejmě z rovnice (2.72) vypadl)). Proto při stanovení  $C_t$  lze bez

újmou na obecnosti vycházet z libovolných rizikových preferencí. Speciálně lze tedy vycházet z neutrality vůči riziku s bezrizikovou úrokovou mírou  $r$  a hledat opční prémii  $C_t$  jako

$$C_t = e^{-r(T-t)} E[\max(S_T - X, 0)], \quad (2.74)$$

kde střední hodnota se počítá při bezrizikové úrokové míře  $r$ . Lze proto psát

$$C_t = e^{-r(T-t)} \int_X^{\infty} (S_T - X) \cdot f(S_T) dS_T, \quad (2.75)$$

kde  $f(S_T)$  je pravděpodobnostní hustota ceny akcie  $S_T$ . Jestliže využijeme toho, že podle (2.56) je

$$\ln S_T \sim N\left(\ln S_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right), \quad (2.76)$$

dostaneme z (2.75) a (2.76) po technických úpravách *Blackův-Scholesův vzorec pro opční prémii evropské opce call na akcii nevyplácející dividendy*. Tento vzorec se obvykle zapisuje ve tvaru

$$C_t = S_t \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2), \quad (2.77)$$

kde vedle předchozího značení je  $N(\cdot)$  distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení  $N(0; 1)$  (tj.  $N(z) = P(Z \leq z)$  pro  $Z \sim N(0; 1)$ , přičemž v dnešní době jsou tyto hodnoty nejsnáze dostupné v rámci tabulkových procesů typu Excel či statistického softwaru Statgraphics)) a

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r + \sigma^2 / 2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad (2.78)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - \sigma^2 / 2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (2.79)$$

Lze ověřit dosazením, že (2.77) opravdu splňuje Blackovu-Scholesovu diferenciální rovnici (2.72).

*Blackův-Scholesův vzorec pro opční prémii evropské opce put na akcii nevyplácející dividendy* dostaneme ze vzorce (2.77) snadno pomocí put-call parity (viz (1.9)) ve tvaru

$$P_t = X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S_t \cdot N(-d_1) = X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot [1 - N(d_2)] - S_t \cdot [1 - N(d_1)]. \quad (2.80)$$

Snadno se ověří, že ve shodě se skutečností  $C_t$  (resp.  $P_t$ ) při rostoucím  $S_t \rightarrow \infty$  konverguje k  $S_t - X \cdot e^{-r(T-t)}$  (resp. k 0), při klesajícím  $\sigma \rightarrow 0$  konverguje k  $\max(S_t - X \cdot e^{-r(T-t)}, 0)$  (resp. k  $\max(X \cdot e^{-r(T-t)} - S_t, 0)$ ) apod.

*Blackův-Scholesův vzorec pro opční prémii amerických opcí na akcii nevyplácející dividendy* je v případě opce call shodný s (2.77), zatímco v případě opce put takový analytický vzorec neexistuje a je nutné použít numerické procedury či aproximativní vzorec (viz také (2.8)).

*Blackův-Scholesův vzorec pro opční prémii na akcii vyplácející dividendy* se získá z odpovídajícího vzorce pro akcii bez výplat dividend odečtením počáteční hodnoty dividend vyplácených do splatnosti opce od promptní ceny akcie (viz také (2.6)). Jestliže modelujeme dividendový výnos ve spojitém čase pomocí konstantní roční intenzity  $\delta$  vztažené k ceně akcie, pak např. (2.77) přechází do tvaru

$$\begin{aligned} C_t &= S_t \cdot e^{-\delta(T-t)} \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2), \\ P_t &= X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S_t \cdot e^{-\delta(T-t)} \cdot N(-d_1), \end{aligned} \quad (2.81)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - \delta + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}. \quad (2.82)$$

## 2.5 Garmanův, Kohlhagenův a Grabbeův model

Garman a Kohlhagen modifikovali B-S model pro oceňování měnových opcí (*foreign currency option*). Měnové opce jsou obchodovány na tzv. *foreign exchange market (FX market)*, kde jsou příslušné transakce prováděny prostřednictvím telekomunikačních systémů po 24 hodin denně na mezinárodní úrovni).

Garman, Kohlhagen a Grabbe navrhli model pro měnové opce, který je založen na předpokladu tvorby bezrizikového zajišťovacího portfolia (*hedging portfolio*) investováním do zahraničních bondů, domácích bondů a příslušné opce.

Uvažujeme-li stejné předpoklady jako v B-S modelu, Garman a Kohlhagen navrhnou následující vzorec pro oceňování evropských měnových call opcí

$$C_t = S_t \cdot e^{-r_f(T-t)} \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2), \quad (2.83)$$

kde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - r_f + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}, \quad (2.84)$$

$r_f$  (resp.  $r$ ) je bezriziková úroková míra pro měnu kupovanou (resp. prodávanou) v rámci uvažované opce,  $S_t$  je spotový kurs,  $X$  je uplatňovací kurs,  $\sigma$  je volatilita spotového kursu a  $(T-t)$  doba do splatnosti.

Pro evropskou měnovou put opci na základě put-call parity platí

$$P_t = X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S_t \cdot e^{-r_f(T-t)} \cdot N(-d_1). \quad (2.85)$$

Grabbe [viz Grabbe (1983)] navrhuje další přístup podobný k B-S modelu, například pro currency call uvádí následující vzorec

$$C_t = B(T-t) \cdot F_t \cdot N(d_1) - B(T-t) \cdot X \cdot N(d_2), \quad (2.86)$$

kde

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \ln\left(\frac{F_t}{X}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right], \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (2.87)$$

$F_t$  je forwardová cena zahraniční měny,  $B(T-t)$  je cena domácího diskontního dluhopisu a  $\sigma$  je volatilita forwardového kursu.

## 2.6 Mertonův, Barone-Adesi a Whaleyův model

Model prezentovaný v [Barone-Adesi a Whaley (1987)], známý jako BAW model, je další modifikací B-S modelu.

Absence příležitosti bezrizikové arbitráže implikuje, že platí následující vztah mezi cenou futuritního kontraktu  $F_t$  a spotovou cenou podkladové komodity  $S_t$

$$F_t = S_t e^{b(T-t)}, \quad (2.88)$$

kde  $(T-t)$  je doba do expirace a  $b$  jsou tzv. náklady přenosu (*cost-of-carry*) dané komodity. Je-li dynamika ceny podkladové komodity dána následující rovnicí

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz, \quad (2.89)$$

kde  $\alpha$  je očekávaná okamžitá relativní cenová změna příslušné komodity a  $\sigma$  její směrodatná odchylka, pak pro dynamiku futuritní ceny platí následující vztah

$$\frac{dF}{F} = (\mu - b)dt + \sigma dz. \quad (2.90)$$

Předpokládáme-li, že zajištěné portfolio skládající se z opce a podkladové komodity lze tvořit a přizpůsobovat měnícím se podmínkám kontinuálně, musí platit následující diferenciální rovnice

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right] + bS \left[ \frac{\partial C}{\partial S} \right] - rC + \left[ \frac{\partial C}{\partial t} \right] = 0. \quad (2.91)$$

Tato diferenciální rovnice se poprvé nepřímo objevila v Mertonově modelu [Merton (1973a)]. Pokud se *cost-of-carry*  $b$  rovnají bezrizikové úrokové míře  $r$ , uvedená rovnice se redukuje do tvaru zmíněném při odvození B-S modelu. Pokud se  $b$  rovná diferencí mezi domácí a zahraniční úrokovou sazbou, rovnice přechází do tvaru v Garman-Kohlhagenově modelu. Užitím hraniční podmínky  $C_t = \max(0, S_T - X)$  se dostáváme k rovnici pro cenu evropské call [Merton (1973b)]

$$C_t = S_t e^{(b-r)(T-t)} N(d_1) - X e^{-r(T-t)} N(d_2), \quad (2.92)$$

kde

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \left[ \ln\left(\frac{S_t}{X}\right) + (b + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) \right] \text{ a } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}. \quad (2.93)$$

Analogicky užitím hraniční podmínky  $P_t = \max(0, X - S_T)$  dostáváme vztah pro cenu evropské put opce

$$P_t = X e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t e^{(b-r)(T-t)} N(-d_1).$$

## 2.7 Míra zisku a její volatilita

### 2.7.1 Míra zisku

Při modelování tržní ceny akcie v odstavci 2.4 byla použita *logaritmická míra zisku*. Logaritmická míra zisku [viz Cipra (2002), Hull (2002)] neboli logaritmická cenová změna či míra zisku při spojitém úročení v čase  $t$  je přirozený logaritmus úročitele  $1 + I_t$  odpovídajícího diskretní míře zisku  $I_t$

$$i_t = \ln(1 + I_t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln P_t - \ln P_{t-1} = p_t - p_{t-1}, \quad (2.94)$$

kde symbol  $p_t$  označuje logaritmus tržní ceny

$$p_t = \ln(P_t) \quad (2.95)$$

(odtud název logaritmická cenová změna). Naopak pro cenu pak platí

$$P_t = P_{t-1} \cdot e^{i_t} \quad (2.96)$$

(odtud název míra zisku při spojitém úročení).

Logaritmická míra zisku se může jevit z hlediska praktických aplikací mnohem složitější než diskrétní míra zisku. To je však vyváženo těmito výhodami:

(1) Logaritmickou míru zisku lze na rozdíl od diskrétní míry zisku modelovat pomocí normálního rozdělení, což předpokládá logaritmicko-normální rozdělení pro podíl cen  $P_t / P_{t-1}$  (u diskrétní míry zisku by normální model zřejmě vedl k připuštění nerealistického předpokladu, že cena  $P_t$  může s nenulovou pravděpodobností nabývat záporných hodnot).

(2) Logaritmická míra zisku se chová konzistentním způsobem v rámci měnových kursů: tj. lze snadno vyjádřit logaritmickou míru zisku opačného měnového kursu: je-li např.  $P_{EUR/USD,t}$  cena jednoho eura v dolarech v čase  $t$  (tj. měnový kurs eura v dolarech) a  $i_{EUR/USD,t}$  odpovídající logaritmická míra zisku, pak pro logaritmickou míru zisku měnového kursu dolaru v eurech platí

$$i_{USD/EUR,t} = \ln\left(\frac{P_{USD/EUR,t}}{P_{USD/EUR,t-1}}\right) = \ln\left(\frac{1/P_{EUR/USD,t}}{1/P_{EUR/USD,t-1}}\right) = -i_{EUR/USD,t}, \quad (2.97)$$

tj. jedná se o opačnou hodnotu k logaritmické míře zisku měnového kursu eura v dolarech. Rovněž lze snadno vyjádřit logaritmickou míru zisku dvou měn prostřednictvím logaritmických měr zisku těchto měn vůči třetí měně: je-li např.  $i_{EUR/JPY,t}$  logaritmická míra zisku eura v jenech v čase  $t$ , pak ji lze vyjádřit prostřednictvím dolaru jako

$$i_{EUR/JPY,t} = \ln\left(\frac{P_{EUR/JPY,t}}{P_{EUR/JPY,t-1}}\right) = \ln\left(\frac{P_{EUR/USD,t} \cdot P_{USD/JPY,t}}{P_{EUR/USD,t-1} \cdot P_{USD/JPY,t-1}}\right) = i_{EUR/USD,t} - i_{JPY/USD,t}, \quad (2.98)$$

tj. jedná se o rozdíl logaritmické míry zisku měnového kursu eura v dolarech a logaritmické míry zisku měnového kursu jenu v dolarech.

(3) Logaritmická míra zisku se lehce agreguje přes více časových období jako prostý součet logaritmických měr zisku přes jednotlivá období. Tedy pro časově agregovanou míru zisku přes  $k$  minulých období platí

$$i_t(k) = \ln(1 + I_t(k)) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right) = p_t - p_{t-k}, \quad (2.99)$$

což lze vyjádřit pomocí neagregovaných složek jako

$$\begin{aligned} i_t(k) &= \ln(1 + I_t(k)) = \ln((1 + I_t) \cdot (1 + I_{t-1}) \cdot \dots \cdot (1 + I_{t-k+1})) = \\ &= i_t + i_{t-1} + \dots + i_{t-k+1}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

## 2.7.2 Typy volatility

I zkušený dealeri se nedokážou dohodnout na jednotné definici volatility a proto je vhodné rozlišovat následující typy volatility:

(1) *Budoucí volatilita (Future volatility)*; je to co by chtěl znát každý obchodník, neboť popisuje budoucí rozdělení cen podkladového aktiva. V teorii je to právě to číslo, o kterém mluvíme při dosazování do oceňovacích modelů.

(2) *Historická volatilita (Historical volatility)*; ačkoliv nikdo nemůže znát budoucí volatilitu, každý dealer, který zamýšlí použít oceňovací model, se musí pokusit o „rozumný“ odhad budoucí volatility. Stejně jako v jiných teoriích je vhodné jako výchozí bod pro takovýto odhad použít historická data. Je nasnadě, že pokud např. za posledních deset let byla volatilita míry zisku určitého podkladového aktiva (měřená směrodatnou odchylkou) v pásmu 10 % až 30 %, bude se v průměru v tomto pásmu pohybovat i v následujícím krátkém období. Existuje mnoho způsobů pro výpočet historické volatility, nejčastěji se však používá způsob uvedený ve vzorci (2.60), který předpokládá logaritmickou míru zisku.

(3) *Předpovídaná volatilita (Forecast volatility)*; stejně tak jako existují metody, které se snaží na základě technických analýz o odhad směru budoucího pohybu ceny podkladového aktiva, existují či spíše stále ještě vznikají metody, které se pokouší o odhad volatility míry zisku, plynoucího z cenových změn podkladového aktiva. Předpověď volatility v čase  $t$  lze provádět obecně o  $k$  kroků dopředu, značíme  $\sigma_{t+k|t}$ . Tento symbol vyjadřuje, že k dispozici máme informaci do času  $t$ , tj. předpověď je založena na pozorovaných hodnotách míry zisku  $r_t, r_{t-1}, r_{t-2}, \dots$ . Nejčastěji se k odhadu volatility používají tyto metody:

- **metoda klouzavých průměrů**: Základním přístupem k předpovědi volatility je metoda klouzavých průměrů, která vychází z klasického odhadu směrodatné odchylky s tím, že pro konstrukci předpovědi se využije vždy pouze  $M$  nejaktuálnějších hodnot míry zisku  $r_t, r_{t-1}, \dots, r_{t-M+1}$

$$\sigma_{t+1|t} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} r_{t-i}^2}. \quad (2.101)$$

Nevýhodou klouzavých průměrů je to, že dávají všem hodnotám pozorovaným v rámci daného okna stejnou váhu  $1/M$  a nerozlišují mezi nejaktuálnější hodnotou u pravého okraje okna, která by měla mít logicky nejvyšší váhu, a mezi nejméně aktuální hodnotou u levého okraje okna, která by měla mít nejnižší váhu.

- **metoda GARCH:** Daleko sofistikovanějším přístupem k volatilitě je založit její předpovídání na vhodných modelech časových řad. Přestože dnes existují přinejmenším desítky různých modelů navržených pro tento účel, většina z nich je založena na principu podmíněné heteroskedasticity navrženém původně v [Engle (1982) a Bollerslev (1986)]. Tento princip se bezkonkurenčně vyrovnává s většinou problémů, které jsou pro časové řady měř zisku typické a které činí v rámci jiných přístupů těžko zvládatelné potíže.

Modely časových řad  $\{r_t\}$  založené na principu podmíněné heteroskedasticity tedy modelují dynamicky se měnící podmíněný rozptyl  $\text{var}(r_{t+1}|r_t, r_{t-1}, \dots) = E(r_{t+1}^2 | r_t, r_{t-1}, \dots)$ , který zároveň představuje podle teorie náhodných procesů předpověď rozptylu  $\sigma_{t+1|t}^2$ , tj.

$$\sigma_{t+1|t}^2 = \text{var}(r_{t+1}|r_t, r_{t-1}, \dots) = E(r_{t+1}^2 | r_t, r_{t-1}, \dots). \quad (2.102)$$

- **metoda exponenciálního vyrovnávání:** Protože použití modelů typu GARCH může být komplikované, používají se v praktických metodikách podstatná zjednodušení. Příkladem je právě předpověď volatility pomocí exponenciálního vyrovnávání využívaná v rámci RiskMetrics. Princip tohoto vyrovnávání spočívá v tom, že vyhlazená hodnota či předpověď se konstruuje jako vážený průměr předchozích hodnot dané časové řady, přičemž váhy tohoto váženého průměru exponenciálně klesají směrem do minulosti, což má logickou interpretaci, neboť pozorování časově nejbližší konstruované hodnotě se podílí na jejím výpočtu daleko významněji, než pozorování časově vzdálená vzhledem k této hodnotě. Speciálně při předpovídání volatility má exponenciální vyrovnávání tvar

$$\sigma_{t+1|t}^2 = (1 - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \cdot r_{t-i}^2, \quad (2.103)$$

kde  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) je tzv. vyrovnávací konstanta. Koefficienty na pravé straně tohoto výrazu  $(1 - \lambda), (1 - \lambda) \cdot \lambda, (1 - \lambda) \lambda^2, \dots$  představují exponenciálně klesající váhy (jejich součet je roven jedné), takže se opravdu jedná o exponenciálně vážený průměr. Přímé použití vzorce (2.103) by však bylo výpočetně náročné, proto se v praxi používá jeho rekurentní verze ve tvaru

$$\sigma_{t+1|t}^2 = (1 - \lambda) \cdot r_t^2 + \lambda \cdot \sigma_{t|t-1}^2. \quad (2.104)$$

RiskMetrics používá ve vzorci exponenciálního vyrovnávání (2.104) při denních mírách zisku vyrovnávací konstantu  $\lambda = 0,94$  a při měsíčních mírách zisku  $\lambda = 0,97$ . Speciálně tedy jednodenní předpověď volatility se v RiskMetrics počítá podle vzorce



$$\sigma_{t+1|t} = \sqrt{0,06r_t^2 + 0,94\sigma_{t|t-1}^2}. \quad (2.105)$$

Při předpovědi o více kroků vpřed ( $T$ ) předpovídáme volatilitu časově agregované míry zisku (2.100)

$$\begin{aligned} \sigma_{t+T|t} &= \sqrt{\text{var}(r_{t+T}(T)|r_t, r_{t-1}, \dots)} = \sqrt{\text{E}(r_{t+T}^2(T)|r_t, r_{t-1}, \dots)} \\ &= \sqrt{\text{E}[(r_{t+T} + r_{t+T-1} + \dots + r_{t+1})^2 | r_t, r_{t-1}, \dots]}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Přitom v RiskMetrics se používá jednoduchý vztah

$$\sigma_{t+T|t} = \sqrt{T} \cdot \sigma_{t+1|t}. \quad (2.107)$$

(4) *Implikovaná volatilita (Implied volatility)*; obecně vzato budoucí, historická a předpovídaná volatilita jsou spojeny spíše s podkladovým aktivem než se samotnou opcí. Lze hovořit o budoucí volatilitě S&P 500 indexu, historické volatilitě US Treasury bondů nebo o předpovídané volatilitě akcií společnosti IBM. Ve všech uvedených případech zmiňujeme volatilitu podkladového aktiva. Nicméně existuje i odlišná interpretace volatility, která je spojena přímo s konkrétní opcí.

Jestliže se s opcemi obchoduje na trhu, je známa jejich tržní cena. Předpokládáme-li, že tržní cena více či méně „respektuje“ B-S model, můžeme považovat všechny parametry v tomto modelu (tedy  $S_t$ ,  $X$ ,  $r$ ,  $T-t$ ) a výslednou hodnotu opce za známé a vypočítat z tohoto modelu  $\sigma_{impl}$ .

(Jde vlastně o volatilitu implikovanou B-S modelem.) Dopočet  $\sigma_{impl}$  není možné provést tak, že rovnicí

$$S_t N(d_1) - Xe^{r(T-t)} N(d_2) = C_{market} \quad (2.108)$$

vyřešíme pro  $\sigma_{impl}$ , neboť rovnice není analyticky řešitelná. Musíme zvolit iterativní proces (metoda pokusů a omylů), který tuto rovnici řeší pro  $\sigma_{impl}$ . To je však možné v rámci široce užívaného tabulkového procesoru MS Excel užitím funkce „hledání řešení“.

### 2.7.3 Volatility Smile / Skew

Jednou z poruch volatility je jev nazývaný *volatility smile* a *volatility skew*. Blackův-Scholesův model předpokládá, že volatilita je konstantní. Implikovaná volatilita, spočtená pro různé opce, které se liší pouze v *strike price*, by tedy měla být totožná. V praxi tomu tak zdaleka není, neboť každý trader obchoduje na základě vlastní představy o budoucím vývoji ceny pokladového aktiva (a to zpravidla na základě technické, psychologické či fundamentální analýzy). Na trhu tedy existuje celá řada heterogenních estimátorů volatility.

Už první verze hypotézy efektivních trhů publikovaná v roce 1900 Louisem Bachelierem [Bachelier (1900)] nezávisle následována Osbornem [Osborne (1959)] je založena na předpokladu, že existují dvě skupiny tržních účastníků (či hráčů) a to „*býci (bulls)*“, kteří spekulují na růst a „*medvědi (bears)*“, kteří naopak spekulují na pokles cen finančních instrumentů. A právě díky tomuto dvojímu pohledu (antagonistické spekulaci) existuje na trhu likvidita.

Protože *býci* i *medvědi* jsou v průměru stejně informováni a stejně inteligentní, je de facto nemožné předpovídat, zdali trh půjde nahoru či dolů zítra nebo někdy v budoucnu. Koncept, že jeden individuální agent nemůže systematicky „přechytračovat“ trh, je jedním z klíčových principů moderních financí a ekonomie (od teorie CAPM až po teorii racionálních očekávání). Podobně jako se liší představy *býků* a *medvědů* o budoucím vývoji cen, liší se i jejich představy (resp. odhady) o budoucím vývoji volatility.

Sám Bachelier říká: „*Zdá se, že trh (jako souhrn spekulantů) v daném okamžiku nemůže věřit ani v růst ani v pokles trhu, neboť pro každou kotovanou cenu existuje stejný počet prodávajících jako kupujících.*“

K vysvětlení *volatility smile* efektu, není zapotřebí žádných předpokladů, stačí to co je obsaženo v hypotéze efektivních trhů. Vraťme se k výše uvedené Bachelierovu citaci a nahraďme v ní termíny „*růst a pokles trhu*“ za termíny „*vysoká a nízká volatility*“. Následující příklad tuto logiku objasní:

- (1) Uvažujme opci na akcii obchodovanou mezi dvěma spekulanty, přičemž každý má svůj vlastní odhad volatility;  $\sigma_1 = 20\%$  a  $\sigma_2 = 40\%$ .
- (2) Řekněme, že spotová cena akcie je \$100 a že jsou vypsány tři call opce s realizačními cenami ve výši \$60, \$100 a \$140, všechny se splatností 3M. Bezriziková úroková míra je 5 %, akcie nevyplácí dividendu.
- (3) Otázka zní, jaká bude tržní hodnota *at-the-money* call opce. Dosadíme-li uvedené volatility do B-S vzorce, dostaneme po řadě následující ceny: \$4,606 a \$8,535. Oba dva spekulanti se budou snažit *dealovat* danou opci, přičemž první z nich bude prodávat (protože věří, že opce má ve skutečnosti nižší hodnotu než je trh ochotný nabídnout) a druhý bude kupovat (protože věří v opak).

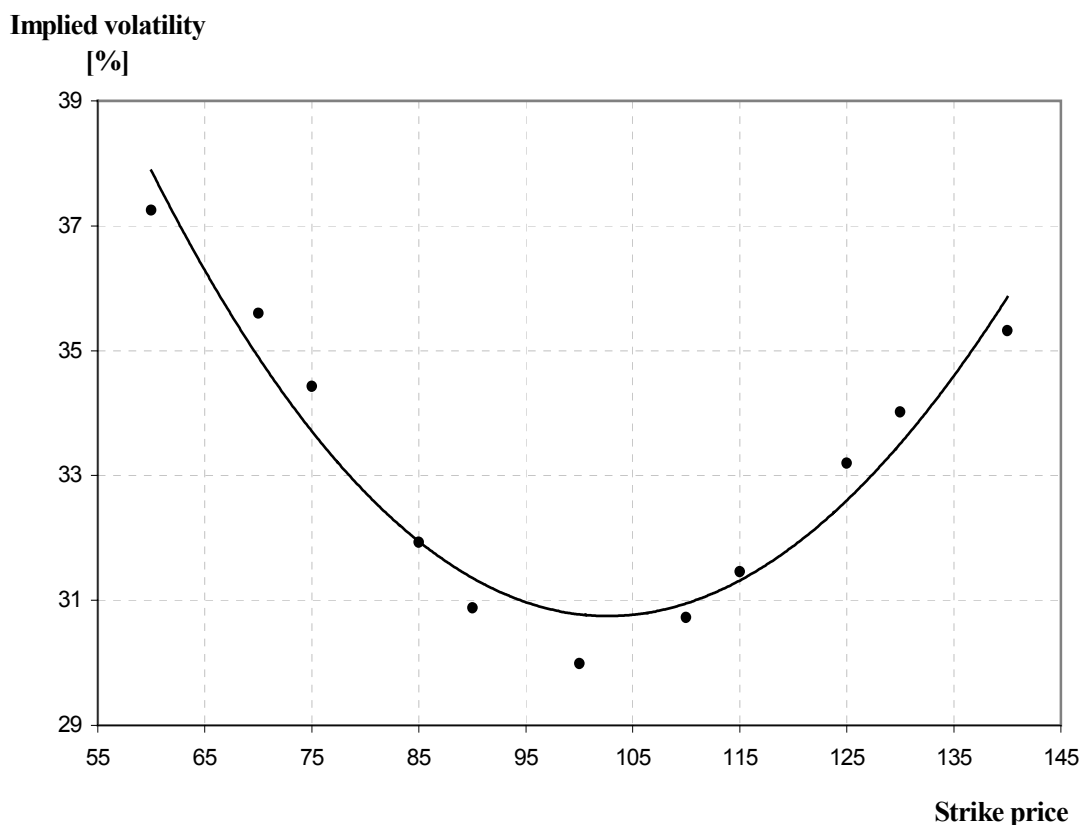
Podle Bacheliera se kotovaná tržní cena rovná mediánu cen udávanými jednotlivými spekulanty. V tomto zjednodušeném příkladě můžeme tržní cenu odhadnout jako průměr (neboť zde je roven mediánu) výše uvedených cen, čili  $(4,606 + 8,535) / 2 = 6,5705$ .

- (4) Tato tržní cena *at-the money* call opce koresponduje s implikovanou volatilitou ve výši 30 %, což se zdá být v pořádku, neboť průměr  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$  je také 30 %.
- (5) Podobný fiktivní obchod lze uzavřít i s dalšími dvěma opcemi s realizačními cenami \$60 a \$140. Odhad jejich tržních cen je \$40.7535 a \$0,2585 (logika výpočtu byla uvedena v bodě ad 3).
- (6) Nyní můžeme spočítat (metodou pokusů a omylů) implikované volatility pro výše zmíněné *out-* a *in-the money* opce užitím B-S modelu. Výsledek je překvapující: v obou případech je implikovaná volatilita větší než 30 %.

Strike price	Call ( $\sigma_1$ )	Call ( $\sigma_2$ )	Quoted call	Market impl. $\sigma$
60	40,743	40,764	40,7535	37,25%
100	4,606	8,535	6,5705	30,00%
140	0,002	0,515	0,2585	35,05%

**Tab. 2.3** Implikovaná volatilita pro různé realizační ceny opce

Pokud bychom opci kotovali pro více realizačních cen, vypočítali jednotlivé implikované volatility a tyto hodnoty zanesli do grafu (na horizontální ose  $X$ , na vertikální impl.  $\sigma$ ), dostali bychom křivku, jejíž tvar by nám připomínal „úsměv“, proto se hovoří o *volatility smile* viz graf 2.1. Za zmínku stojí, že k vysvětlení tohoto jevu není zapotřebí žádných speciálních předpokladů. Jedinou příčinou této grafické formace jsou heterogenní odhady volatility jednotlivých dealerů.



**Graf 2.1** Volatility smile

V praxi se také velmi často stává (zejména po burzovním krachu v roce 1987), že tento *usměv* (*volatility smile*) má spíše podobu *úšklebku* (*volatility skew, smirk, sneer*). Pro tento tvar křivky existuje opět celá řada vysvětlení (ale jen ztěžji lze určit, které je to správné). Je například prokázáno, že čím vyšší je bezriziková úroková míra, tím menší je symetrie *úsměvu*. Další vysvětlení napadá idealizované předpoklady B-S modelu jako je logaritmicke-normální rozdělení výnosů, neboť na drtivé většině trhů je pravděpodobnostní rozdělení výnosů více leptokurtické (je sice podobné normálnímu rozdělení, ale od klasického normálního rozdělení ho poměrně významně odlišují těžší konce a tenčí pás), což znamená, že *out-of-the-money* a *in-the-money* opce by měla mít jinou cenu, než jim určuje B-S model. Samozřejmě, že dealeri či brokeri si jsou tohoto leptokurtického rozdělení vědomi a cenu od B-S modelu značně modifikují. Je na místě také podotknout, že v praxi se řada dealerů řídí B-S modelem pouze orientačně, nebo se jím neřídí vůbec (– potom je již vysvětlení *volatility skew* nasnadě).

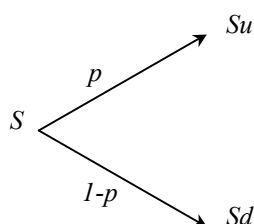
## 2.8 Oceňování opcí užitím binomického modelu

*Blackův-Scholesův* model a jeho modifikace jsou vhodnými analytickými nástroji k oceňování evropských call a put opcí na akcie, akciový index, měnu a futuritní kontrakty.

Rovněž mohou být využity pro oceňování amerických call opcí na akcie nevyplácející dividendy a pro některé americké call opce na akcie nesoucí dividendy, avšak nelze je použít pro oceňování převážné většiny amerických opcí. Pro tyto případy se používá binomický model [viz Cox&Rubinstein (1979); Hull (1991)].

### 2.8.1 Binomický model pro akcie nevyplácející dividendy

Uvažujme ohodnocení opce na akcii nevyplácející dividendu. Začneme rozdělením životnosti opce do velkého počtu malých časových intervalů délky  $\Delta t$ . Předpokládejme, že v každém časovém intervalu se cena akcie pohybuje z její počáteční hodnoty  $S$  do jedné ze dvou možných nových hodnot,  $Su$  nebo  $Sd$ . Tento model je znázorněn na obrázku 2.2. Platí, že  $u > 1$  a  $d < 1$ . Pohyb z ceny  $S$  do  $Su$  je tudíž pohyb nahoru (*up*) a pohyb z  $S$  do  $Sd$  je pohyb dolů (*down*). Pravděpodobnost růstu ceny akcie je  $p$  a pravděpodobnost poklesu je rovna doplňku této hodnoty do jedné, tedy  $1 - p$ .



Obr. 2.2. Binomický model pro akcii nevyplácející dividendy

#### Rizikově neutrální oceňování

Jakékoliv zajištění závislé na ceně akcie může být oceněno za předpokladu, že svět je rizikově neutrální. Tedy pro účely oceňování opcí předpokládáme, že

(1) očekávaný výnos ze všech obchodovaných „*securities*“ je roven bezrizikové (*risk-free*) úrokové sazbě;

(2) budoucí *cash flows* mohou být ohodnoceny diskontováním jejich očekávaných hodnot bezrizikovou úrokovou sazbou.

#### Determinace $p$ , $u$ a $d$

Parametry  $p$ ,  $u$  a  $d$  musí být zvoleny tak, aby poskytly správné hodnoty pro střední hodnotu a rozptyl změny ceny akcie během časového intervalu  $\Delta t$ . Protože předpokládáme rizikově

neutrální svět, očekávaný výnos z akcie je bezriziková úroková sazba  $r$ . Tudíž očekávaná hodnota ceny akcie na konci časového intervalu  $\Delta t$  je  $Se^{r\Delta t}$ , kde  $S$  je cena akcie na počátku časového intervalu.

Platí, že

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)Sd, \quad (2.109)$$

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d. \quad (2.110)$$

Je-li směrodatná odchylka proporcionální změny ceny akcie v krátkém časovém intervalu  $\Delta t$   $\sigma\sqrt{\Delta t}$ , znamená to, že rozptyl aktuální ceny v  $\Delta t$  je  $S^2\sigma^2\Delta t$ . Protože rozptyl náhodné proměnné  $Q$  je definován jako  $E(Q^2) - E(Q)^2$ , kde  $E$  značí střední hodnotu, pak zřejmě platí, že

$$\begin{aligned} S^2\sigma^2\Delta t &= pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2[pu + (1-p)d]^2, \\ \sigma^2\Delta t &= pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2. \end{aligned} \quad (2.111).$$

Rovnice (2.110) a (2.111) kladou dvě podmínky na  $p$ ,  $u$  a  $d$ . Třetí podmínka, která se obvykle používá je  $u = \frac{1}{d}$ . Za předpokladu, že  $\Delta t$  je malé, tři výše uvedené podmínky jsou splněny

pomocí následujících rovnic: 
$$p = \frac{a-d}{u-d}, \quad (2.112)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.113)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (2.114)$$

kde 
$$a = e^{r\Delta t}. \quad (2.115)$$

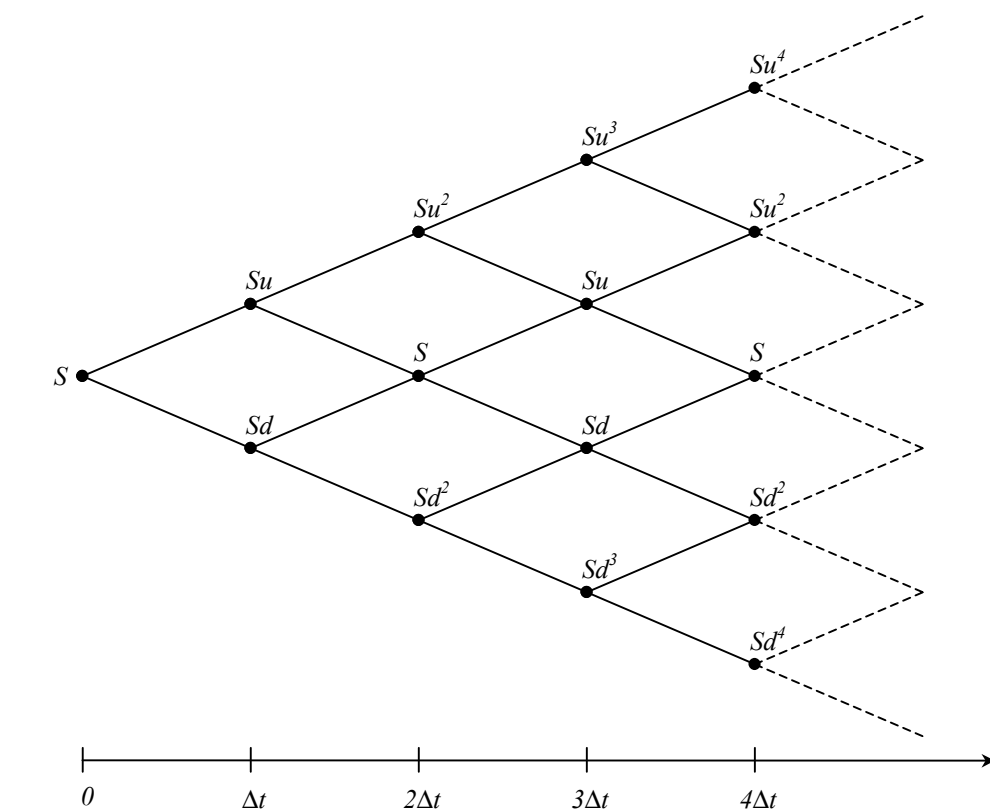
### Binomický strom cen akcie

Kompletní strom cen akcie při užití binomického modelu je ilustrován na obrázku 2.3(a). V čase nula cenu akcie  $S$  známe. V čase  $\Delta t$  jsou dvě možné varianty ceny akcie a to buď  $Su$  při nárůstu či  $Sd$  při poklesu ceny akcie; v čase  $2\Delta t$  jsou tři možné ceny akcie a to  $Su^2$ ,  $S$  a  $Sd^2$ ; atd. Obecně v čase  $i\Delta t$  existuje  $i+1$  možných cen akcie, které lze zapsat jako

$$Su^j d^{i-j}, \text{ kde } j = 0, 1, \dots, i \quad (2.116)$$

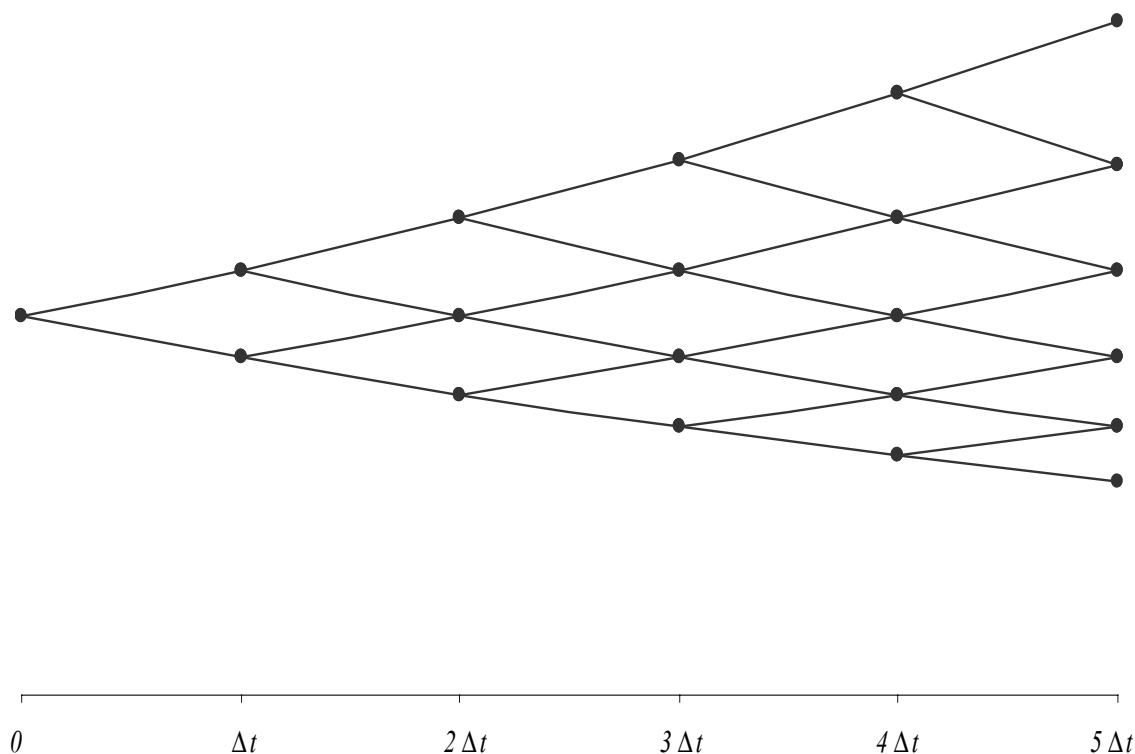
Povšimněme si, že vztah  $u = \frac{1}{d}$  je použit při výpočtu ceny akcie v každém uzlu stromu na obr. 2.3. Např.  $Su^2d = Su$ . Za zmínku rovněž stojí, že každý pohyb nahoru následovaný pohybem dolů vede ke stejné ceně akcie jako pohyb dolů následovaný pohybem nahoru. Tento fakt podstatně snižuje počet uzlů stromu.

<sup>1</sup> Security = cenný papír



Obr. 2.3(a) Binomický strom pro akcii nevyplácející dividendu

Pozn.: Na obr. 2.3(a) je znázorněno větvení binomického stromu pouze orientačně, neboť podle výše uvedených vzorců (2.113) a (2.114) cena akcie roste (či klesá) exponenciálně, nikoliv lineárně. Přesněji je tedy cenový vývoj zachycen na obr. 2.3(b).



**Obr. 2.3(b)** Binomický strom pro akcii nevyplácející dividendu

### Oceňování pomocí binomického stromu

Princip oceňování opcí spočívá v tom, že se pohybujeme od konce stromu (čas  $T$ ) k jeho počátku. Hodnota opce je v čase  $T$  známa. Např. hodnota put opce je  $\max(X - S_T, 0)$  a hodnota call opce  $\max(S_T - X, 0)$ , kde  $S_T$  je cena akcie v čase  $T$  a  $X$  uplatňovací cena (strike price). Protože předpokládáme „risk-neutral world“, hodnota opce v každém uzlu v čase  $T - \Delta t$  může být vypočtena jako očekávaná hodnota v čase  $T$  diskontována sazbou  $r$  přes časovou periodu  $\Delta t$ . Podobně hodnota v každém uzlu v čase  $T - 2\Delta t$  je kalkulována jako očekávaná hodnota v čase  $T - \Delta t$  diskontována přes časový interval  $\Delta t$  (tedy k časovému okamžiku  $T - 2\Delta t$ ) bezrizikovou úrokovou sazbou  $r$ . Analogicky jsou počítány hodnoty v předchozích časových okamžicích. Tedy postupně se dostáváme přes všechny uzly k počátku a tím zjistíme hodnotu opce v čase nula. V případě americké opce je nezbytné v každém uzlu zkontrolovat preference ohledně držby opce po další časovou periodu či jejího předčasného uplatnění.

### Algebraické vyjádření

Předpokládejme, že životnost americké opce na akcie nevyplácející dividendy je rozdělena na  $N$  subintervalů délky  $\Delta t$ . Definujme  $f_{ij}$  jako hodnotu dané opce v čase  $i\Delta t$ , kdy



cena akcie je  $Su^j d^{i-j}$  pro  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq i$ . Tento vztah platí pro hodnotu opce v uzlu  $(i, j)$ .

Protože hodnota americké opce v době její splatnosti je  $\max(X - S_T, 0)$ , víme, že

$$f_{Nj} = \max(X - Su^j d^{N-j}, 0), \text{ kde } j = 0, 1, \dots, N \quad (2.117)$$

Existuje pravděpodobnost  $p$  pohybu z uzlu  $(i, j)$  v čase  $i\Delta t$  do uzlu  $(i+1, j+1)$  v čase  $(i+1)\Delta t$  a pravděpodobnost  $1-p$  pohybu z uzlu  $(i, j)$  v čase  $i\Delta t$  do uzlu  $(i+1, j)$  v čase  $(i+1)\Delta t$ . Předpokládáme-li, že nedojde k předčasnému uplatnění opce, rizikově neutrální hodnocení je dáno vztahem

$$f_{ij} = e^{-r\Delta t} (pf_{i+1, j+1} + (1-p)f_{i+1, j}) \quad (2.118)$$

pro  $0 \leq i \leq N-1$  a  $0 \leq j \leq i$ . Pokud vezmeme v úvahu předčasné uplatnění opce, hodnota  $f_{ij}$  musí být porovnána s vnitřní hodnotou opce (*intrinsic value*), pak získáváme

$$f_{ij} = \max\{X - Su^j d^{i-j}; e^{-r\Delta t} (pf_{i+1, j+1} + (1-p)f_{i+1, j})\}. \quad (2.119)$$

Protože výpočet začíná v čase  $T$  a pohybujeme se zpětně, hodnota v čase  $i\Delta t$  nezahrnuje pouze efekt možnosti předčasného uplatnění opce v čase  $i\Delta t$ , ale i efekt předčasného uplatnění v následujících časových okamžicích. V limitním případě, kdy se  $\Delta t$  blíží nule získáme přesnou hodnotu americké opce. (V praxi pro  $N = 30$  již získáváme rozumné výsledky.)

### Příklad

Uvažujme  $5M^2$  americkou put opci na akcii nevyplácející dividendy.

- Stock price  $S = \$50$
- Strike price  $X = \$50$
- Risk-free interest rate  $r = 10\%$  p.a.
- Volatility  $\sigma = 40\%$  p.a.
- $T = 0,4167$  ( $\cong 5/12$ )

Pro konstrukci binomického stromu rozdělíme životnost opce na 5 intervalů o délce 1 měsíc ( $\cong 0,0833$  roku). Pak  $\Delta t = 0,0833$  a užitím rovnic (2.112) až (2.115) dostáváme

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1,1224;$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0,8909;$$

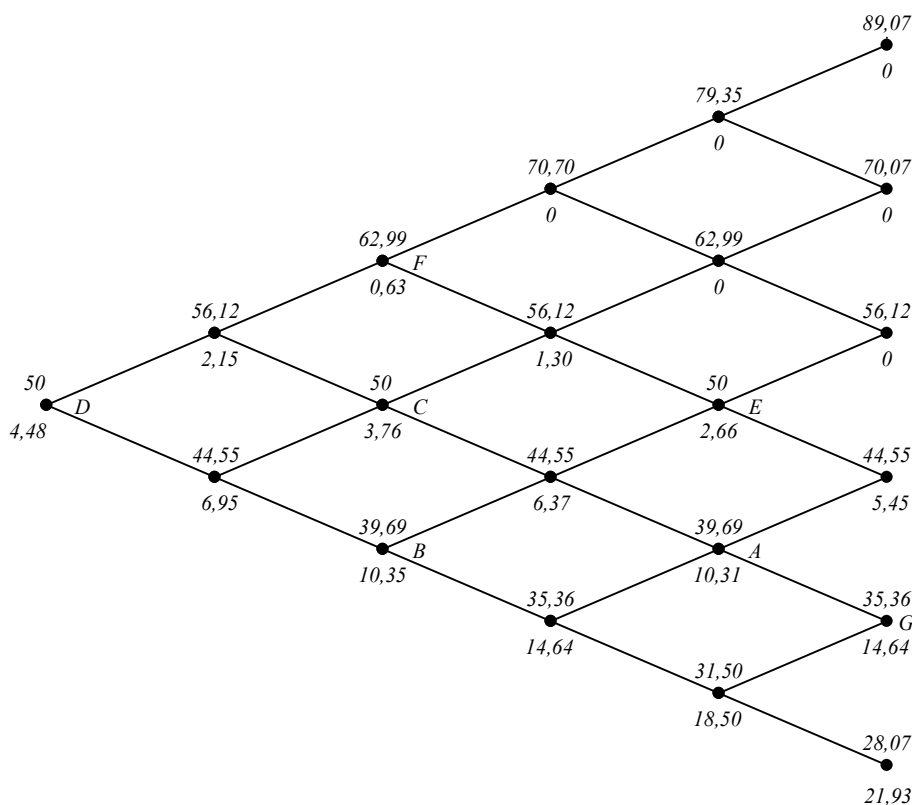
---

<sup>2</sup>  $5M = 5\text{-month}$

$$a = e^{r\Delta t} = 1,0084; \quad p = \frac{a - d}{u - d} = 0,5076;$$

$$1 - p = 0,4924.$$

Obr. 2.4 znázorňuje binomický strom. U každého uzlu jsou uvedena dvě čísla. Horní znázorňuje cenu akcie a spodní hodnotu opce. Pravděpodobnost nárůstu ceny akcie je vždy 0,5076 a pravděpodobnost poklesu je 0,4924.



**Obr. 2.4** Binomický strom pro americkou put na akcii nevyplácející dividendy

Cena akcie v  $j$ -tém uzlu ( $j = 0, 1, \dots, i$ ) v čase  $i\Delta t$  je vypočtena podle  $Su^j d^{i-j}$ . Tak např. cena akcie v uzlu  $A$  ( $i = 4, j = 1$ ) je  $50 \cdot 1,1224 \cdot 0,8909^3 = 39,69$  dolarů. Ceny opcí v koncových uzlech jsou kalkulovány jako  $\max(X - S_T, 0)$ . Např. cena opce v bodě  $G$  je  $50 - 35,36 = 14,64$ . Opční ceny v předposledních uzlech jsou počítány z cen v posledních uzlech. Nejprve předpokládáme, že opce není v těchto uzlech uplatněna. To znamená, že cena opce je vyjádřena jako současná hodnota očekávané opční ceny v čase  $\Delta t$ . Např. v bodě  $E$  je cena opce

$$(0,5076 \cdot 0 + 0,4924 \cdot 5,45)e^{-0,10 \cdot 0,0833} = 2,66 \text{ USD},$$

zatímco v bodě  $A$

$$(0,5076 \cdot 5,45 + 0,4924 \cdot 14,64)e^{-0,10 \cdot 0,0833} = 9,90 \text{ USD.}$$

Poté je nezbytné uvážit zda je výhodnější opci uplatnit (předčasně) či držet po další období. V uzlu  $E$  předčasné uplatnění přináší opci nulovou hodnotu, neboť cena akcie i uplatňovací cena dosahují stejné výše a to 50 USD. V takovém případě je zřejmě výhodnější opci držet i nadále. Korektní hodnota (*correct value*) opce v  $E$  je tudíž 2,66 USD. V uzlu  $A$  jde o zcela jinou situaci. Pokud je opce uplatněna nabývá hodnoty  $50,00 - 39,69 = 10,31$  USD. To je více než 9,90 USD. To znamená, že pokud je dosaženo bodu  $A$ , opce by měla být uplatněna a její hodnota je 10,31 USD (nikoliv 9,90 USD).

Ceny opce v předcházejících uzlech jsou počítány analogickým způsobem. Všimněme si ale, že když je opce v penězích (*in-the-money*), tak její předčasné uplatnění nemusí být vždy nejvýhodnější. Uvažujme uzel  $B$ . Pokud je opce realizována, její hodnota je  $50,00 - 39,69 = 10,31$  USD. Zatímco pokud je držena dosahuje výše

$$(0,5076 \cdot 6,37 + 0,4924 \cdot 14,64)e^{-0,10 \cdot 0,0833} = 10,35 \text{ USD.}$$

Opce by tedy neměla být uplatněna v tomto uzlu a její korektní hodnota je 10,35 USD. Pohybujeme-li se zpět podél stromu zjistíme cenu opce v počátečním bodě tj. 4,48 USD. Tato hodnota je pouze odhadem korektní ceny. V praxi jsou používány kratší úseky  $\Delta t$  a mnohem více uzlů. Skutečná hodnota opce, získaná užitím intervalů velmi krátkých délek  $\Delta t$  je 4,29 USD.

### 2.8.2 Binomický model pro akcie vyplácející dividendu

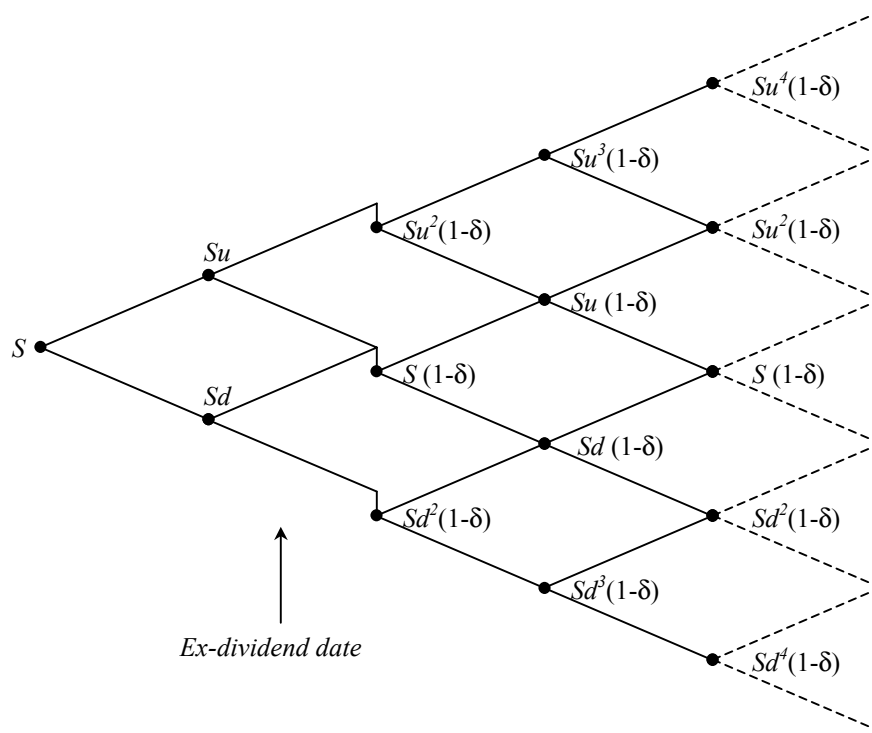
V případě, že akcie vyplácí dividendu je situace poněkud složitější. Pokud předpokládáme, že známý dividendový výnos  $\delta$  má být vyplacen v jistém budoucím časovém okamžiku, tak se binomický strom modifikuje do podoby uvedené na obr. 2.5 a může být analyzován analogickým způsobem jako v předcházejícím případě. Jestliže časový okamžik  $i\Delta t$  předchází *ex-dividend date*<sup>3</sup>, uzly na stromu odpovídají cenám akcie

$$Su^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (\text{viz 2.116})$$

kde  $u$  a  $d$  jsou definovány stejně jako v rovnicích (2.113) a (2.114). Jestliže čas  $i\Delta t$  následuje až po *ex-dividend date*, uzly korespondují s cenami

<sup>3</sup> Ex-dividend date = datum bez dividendy

$$S(1-\delta)u^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (2.120)$$

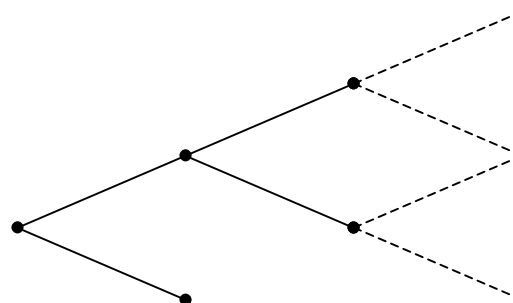


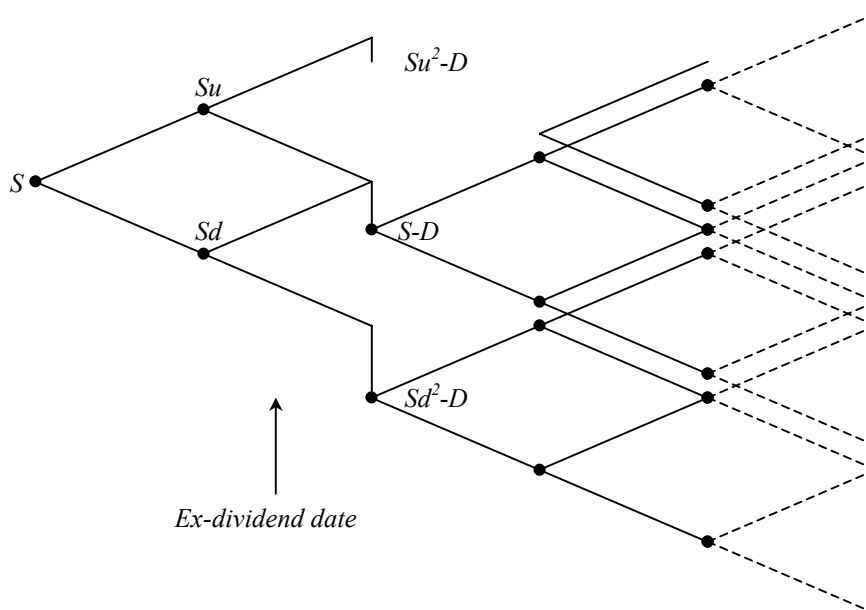
**Obr. 2.5** Binomický strom pro akcii přinášející 1 dividendový výnos  $\delta$  v jistém časovém okamžiku

V případě existence většího počtu (předem známých) dividendových výnosů během životnosti opce můžeme postupovat analogicky. Pokud  $\delta_i$  je celkový dividendový výnos spojený se všemi *ex-dividend dates* mezi časy 0 a  $i\Delta t$ , uzly v čase  $i\Delta t$  odpovídají cenám

$$S(1-\delta_i)u^j d^{i-j} \quad (2.121)$$

V USA je realističtější situace, kdy předem známe spíše dolarovou částku, než-li dividendový výnos. Jestliže dále předpokládáme, že volatilita akcie  $\sigma$  je konstantní, binomický strom nabývá podoby na obr. 2.7





**Obr. 2.7** Binomický strom pro předem známou dolarovou částku dividendy a konstantní volatilitu

Strom se nespojuje (jako v předchozím případě), což znamená, že počet uzlů, které mají být ohodnoceny se pravděpodobně zvýší, zvláště vyplácí-li se několik dividend. Předpokládejme, že máme jednu dividendu, „ex-dividend date“  $\tau$  je mezi  $k\Delta t$  a  $(k + 1)\Delta t$ , a že dolarová částka dividendy je  $D$ . Když  $i \leq k$ , uzly na stromě v čase  $i\Delta t$  odpovídají cenám akcie

$$Su^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, i \quad (\text{viz 2.116})$$

stejně jako ve výše uvedeném případě.

Pokud  $i = k + 1$ , uzly na stromě korespondují cenám

$$(Su^j d^{i-j} - D) \cdot u \quad \text{a} \quad (Su^j d^{i-j} - D) \cdot d \quad (2.122)$$

pro  $j = 0, 1, 2, \dots, i$ .

Celý problém lze zjednodušit za předpokladu, že cena akcie má dvě složky: část, která je nejistá a část, která je současnou hodnotou všech budoucích dividend během životnosti opce. Máme-li (stejně jako v předchozím případě) pouze jeden *ex-dividend date*  $\tau$  během trvání opce a je-li  $k\Delta t \leq \tau \leq (k + 1)\Delta t$ , pak hodnota nejisté složky  $S^*$  v čase  $x$  je dána

$$S^*(x) = \begin{cases} S(x), & \text{když } x > \tau \\ S(x) - De^{-r(\tau-x)}, & \text{když } x \leq \tau \end{cases} \quad (2.123)$$

kde  $D$  je dividendy. Definujme  $\sigma^*$  jako volatilitu  $S^*$  a předpokládejme konstantnost spíše u  $\sigma^*$  než u  $\sigma$ . Parametry  $p$ ,  $u$  a  $d$  můžeme spočítat z rovnic (2.112), (2.113), (2.114) a (2.115), kde  $\sigma$  nahradíme  $\sigma^*$  a strom pro modelování  $S^*$  můžeme zkonstruovat obvyklým způsobem.

Přidáním současné hodnoty budoucích dividend k ceně akcie v každém uzlu se změní binomický strom na takový, který modeluje  $S$ . V čase  $i\Delta t$  uzly na stromě odpovídají cenám

$$S^*(t)u^j d^{i-j} + De^{-r(\tau-i\Delta t)} \quad j = 0, 1, \dots, i; \quad (2.124)$$

když  $i\Delta t < \tau$  a

$$S^*(t)u^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i; \quad (2.125)$$

když  $i\Delta t > \tau$ .

Tento postup, vyžadující dokonalý odhad volatility ceny akcie, dosáhne stavu, že se strom spojí a bude mít  $i + 1$  uzlů v čase  $i\Delta t$ . Použitou metodu lze snadno zobecnit pro situace, kdy je vypláceno více dividend.

### Příklad

Uvažujme 5M americkou put opci na akcii, u které se očekává výplata dividendy ve výši 2,06 USD během životnosti opce.

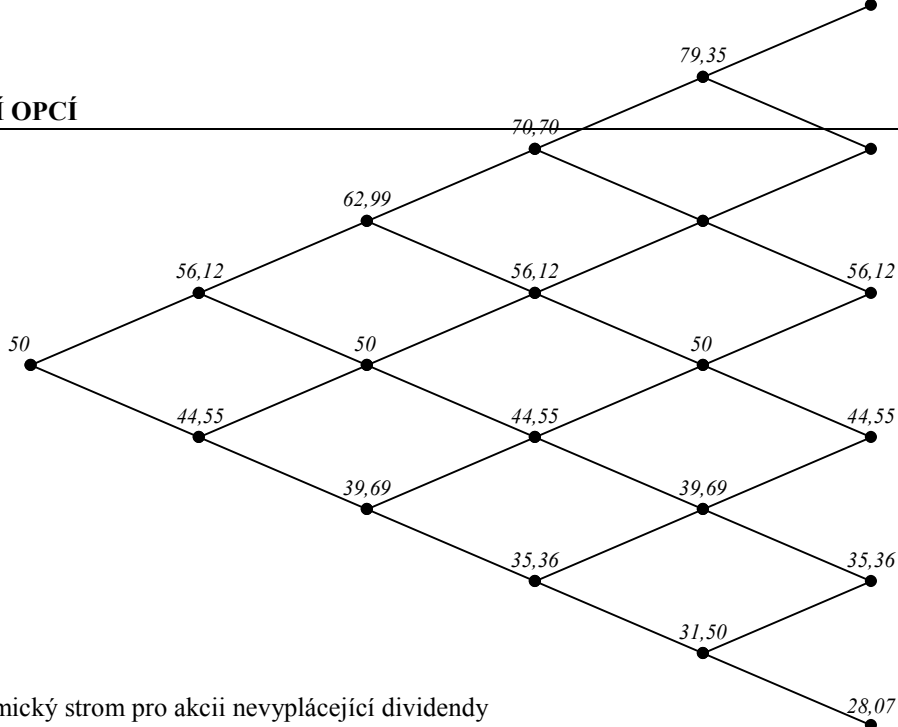
- Initial Stock price  $S = \$52$
- Strike price  $X = \$50$
- Risk-free interest rate  $r = 10\%$  p.a.
- Volatility  $\sigma = 40\%$  p.a.
- Ex-dividend date je za  $3\frac{1}{2}$  měsíce

Nejprve zkonstruujeme strom, kterým budeme modelovat  $S^*$ , což je cena akcie méně současná hodnota budoucích dividend během životnosti opce. Současná hodnota dividendy na počátku je  $2,06e^{-0,2917 \cdot 0,1} = 2,00$  USD. Tudiž počáteční hodnota  $S^*$  je 50 USD. Obr. 2.7 znázorňuje binomický strom pro  $S^*$ .

89,07

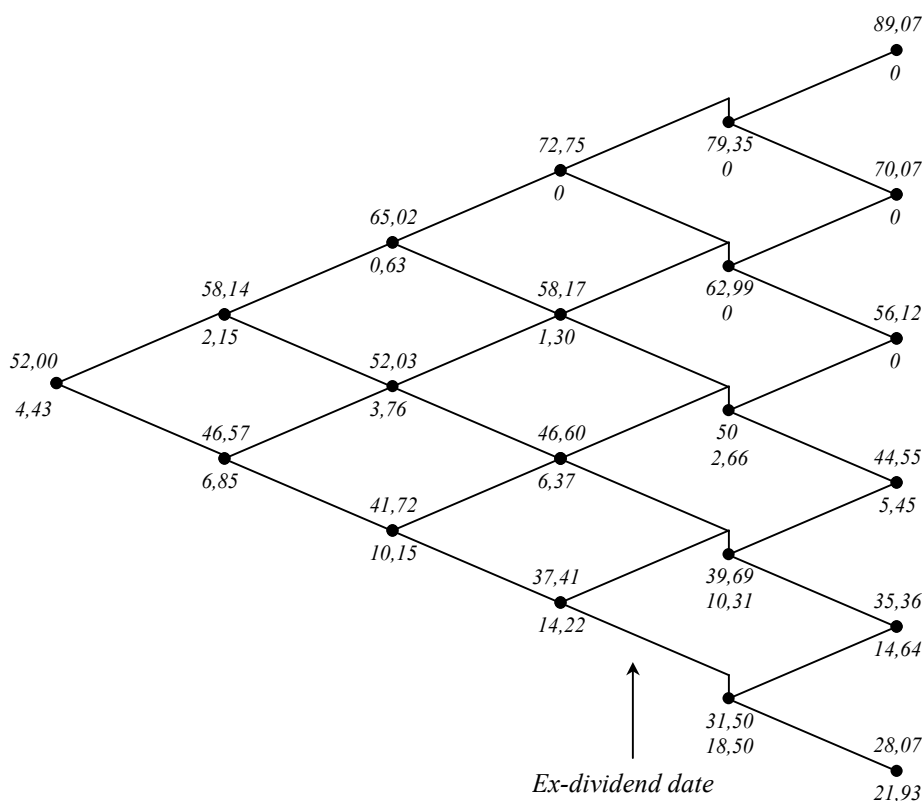
70,07

62,99



**Obr. 2.7** Binomický strom pro akcii nevyplácející dividendy

Přípočtením současné hodnoty dividendy v každém uzlu získáme obr. 2.8, což je binomický model pro  $S$ . Pravděpodobnosti v každém uzlu jsou (stejně jako na obr. 2.7) 0,5076 pro růst a 0,4924 pro pokles ceny akcie.



**Obr. 2.8** Binomický strom pro akcii vyplácející předem známou dividendu

Pohybujeme-li se zpět podél stromu zjistíme cenu opce v počátečním bodě tj. 4,43 USD.

### 2.8.3 Konvergence binomického modelu k Black-Scholesově modelu

Relativně velmi jednoduchý binomický model konverguje za určitých předpokladů k sofistikovanému B-S modelu. Tedy dává naprosto stejné výsledky jako tento model. V podstatě jde pouze o tři předpoklady:

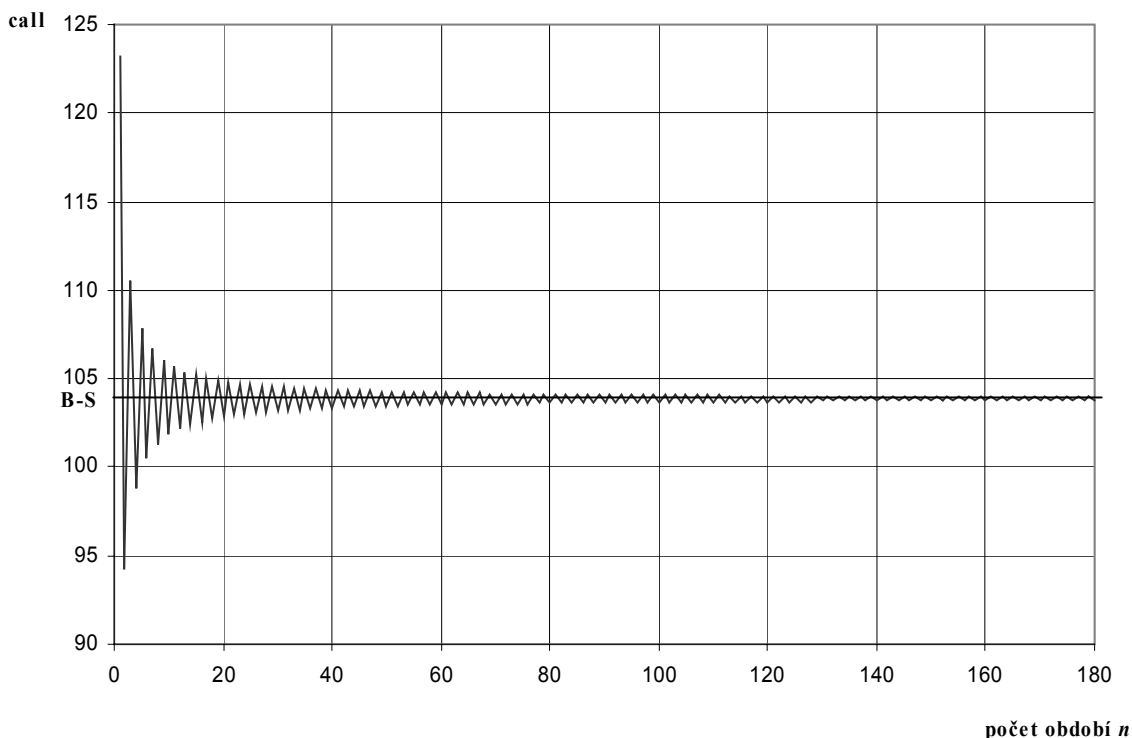
(1) *Spojitosť procesu.* Změna kursu akcie je v reálném světě v podstatě spojitý proces. Jestliže máme např. 6M opci a v binomickém modelu vezmeme za  $n = 6$ , máme diskrétní model velmi vzdálený od reality. Povolujeme vlastně jen jednu změnu akcie za měsíc. Zvolíme-li však  $n = 180$ , pak jsme se již velmi přiblížili spojitému procesu, neboť kurs akcie se vlastně mění každý den. Spojitosť v binomickém modelu tedy můžeme dosáhnout tak, že budeme volit  $n$  dostatečně velké. Precizněji řečeno, zkoumáme k jakým hodnotám konverguje binomický model, pokud  $n$  konverguje k nekonečnu.

(2) *Vhodná volba parametrů  $u$  a  $d$ .* Se vzrůstajícím  $n$  se zkracuje interval, ve kterém se mění hodnota podkladové akcie. Je zřejmé, že velikost změny kursu ceny akcie bude závislá na velikosti jednotkového intervalu, tedy na velikosti  $n$ . Současně je zřejmé, že  $n$  musí být zvoleno tak, aby celý model konvergoval k Black-Scholesově modelu.

(3) *Spojitosť úročení.* Se vzrůstajícím  $n$  se zkracuje interval, ve kterém se nejen mění kurs akcie, ale také výnosy z bezrizikových investic. Proto se i v binomickém modelu používá úročení ve spojitém čase.

V grafu 2.1 je znázorněna konvergence binomického modelu k B-S modelu. Pro ilustraci je zvolena 6M call opce na akcii nevyplácející dividendu s těmito parametry:  $S_t = 1000$ ,  $X = 1000$ ,  $\sigma = 0,30$ ,  $r = 0,30$ .





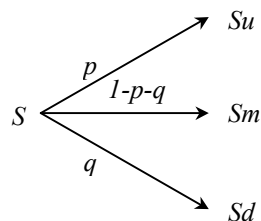
**Graf 2.1** Konvergence binomického modelu k B-S modelu

## 2.9 Oceňování opcí užitím trinomického modelu

Trinomický model podobně jako binomický model je vhodný k oceňování amerických opcí (zejména put) a to jak na akcie nevyplácející i vyplácející dividendy. Tedy v těch případech, kdy není možné použít Blackův-Scholesův model.

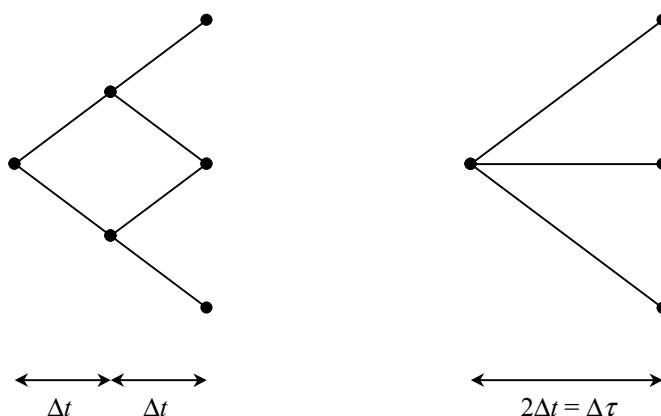
### 2.9.1 Trinomický model pro akcie nevyplácející dividendy

Uvažujme ohodnocení opce na akcii nevyplácející dividendu. Začneme rozdělením životnosti opce do velkého počtu malých časových intervalů délky  $\Delta\tau$  ( $\Delta\tau = 2\Delta t$  z binomického modelu). Předpokládejme, že v každém časovém intervalu se cena akcie pohybuje z její počáteční hodnoty  $S$  do jedné ze tří možných nových hodnot  $S_u$ ,  $S_m$ ,  $S_d$ . Tento model je zobrazen na obrázku (2.9). Platí, že  $u > 1$ ,  $m = 1$  ( $S_m = S$ ) a  $d < 1$ . Pohyb ceny z  $S$  do  $S_u$  je tedy pohyb nahoru, pohyb z  $S$  do  $S_d$  je pohyb dolů a v případě pohybu do uzlu  $S_m$  se cena akcie nemění. Pravděpodobnost růstu ceny akcie je  $p$ , pravděpodobnost poklesu ceny akcie je  $q$  a pravděpodobnost, že cena akcie zůstane stejná je  $1 - p - q$ .



Obr. 2.9 Trinomický model pro akcii nevyplácející dividendy

Při porovnání binomického a trinomického stromu nelze přehlédnout významný fakt, že spojením dvou kroků z binomického stromu (každý krok o délce  $\Delta t$ ) získáme jeden krok trinomického stromu (o délce  $\Delta \tau = 2\Delta t$ ). Viz obr. 2.10.



Obr. 2.10 Analogie mezi binomickým a trinomickým stromem

**Rizikově neutrální oceňování**

Analogicky k binomickému modelu předpokládáme, že:

- (1) očekávaný výnos ze všech obchodovaných „*securities*“ je roven bezrizikové úrokové sazbě  $r$ ;
- (2) budoucí *cash flows* mohou být ohodnoceny diskontováním jejich očekávaných hodnot bezrizikovou úrokovou sazbou.

**Determinace  $p, q, u$  a  $d$**

Hodnoty  $p, q, u$  a  $d$  se volí tak, aby střední hodnota (resp. směrodatná odchylka) relativní změny hodnoty  $S$  během  $\Delta \tau$  byla opravdu  $r$  (resp.  $\sigma\sqrt{2\Delta \tau}$ ). Toto explicitně vyjádřeno znamená, že musí zaprvé platit

$$Se^{r\Delta \tau} = pSu + (1 - p - q)Sm + qSd, \tag{2.126}$$

$$e^{r\Delta \tau} = pu + (1 - p - q)m + qd, \tag{2.127}$$

přičemž ( $0 < p, q < 1$ ) a  $\Delta\tau = 2\Delta t$  z binomického modelu.

Zadruhé je-li směrodatná odchylka relativní změny ceny akcie v krátkém časovém intervalu  $\Delta\tau$   $\sigma\sqrt{2\Delta\tau}$ , znamená to, že rozptyl aktuální ceny akcie v  $\Delta\tau$  je  $S^2\sigma^2 2\Delta\tau$ . Protože rozptyl náhodné proměnné  $Q$  je definován jako  $E(Q^2) - [E(Q)]^2$ , kde  $E$  značí střední hodnotu, pak zřejmě platí, že

$$S^2\sigma^2 2\Delta\tau = pS^2u^2 + (1-p-q)S^2m^2 + qS^2d^2 - S^2[pu + (1-p-q)m + qd]^2, \quad (2.128)$$

$$\sigma^2 2\Delta\tau = pu^2 + (1-p-q)m^2 + qd^2 - [pu + (1-p-q)m + qd]^2. \quad (2.129)$$

Analogicky k binomickému modelu předpokládáme, že  $u = \frac{1}{d}$ , pak dostáváme

$$p = \left( \frac{e^{r\Delta\tau/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta\tau/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta\tau/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta\tau/2}}} \right)^2, \quad (2.130)$$

$$q = \left( \frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta\tau/2}} - e^{r\Delta\tau/2}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta\tau/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta\tau/2}}} \right)^2, \quad (2.131)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta\tau}}, \quad (2.132)$$

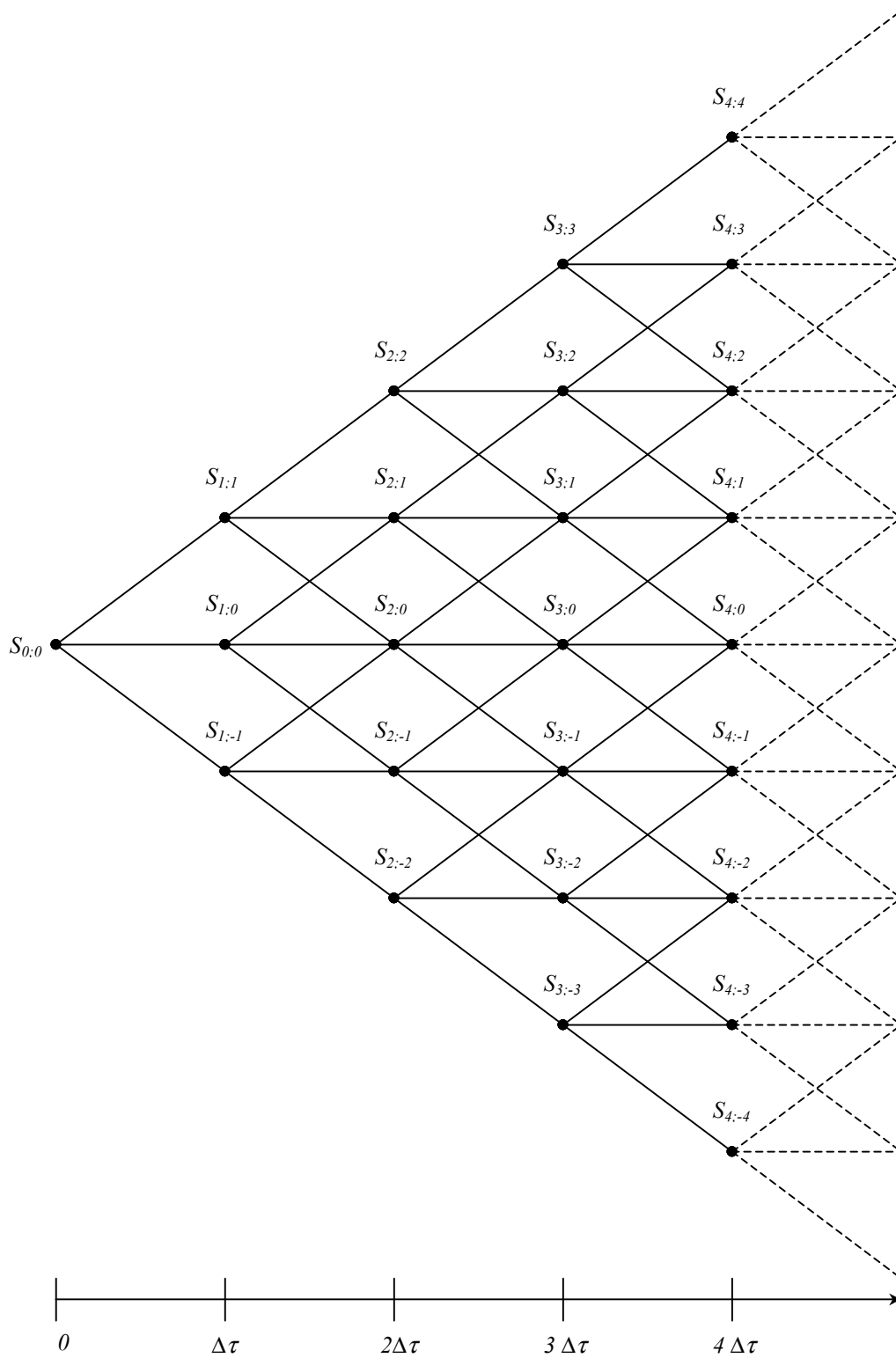
$$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta\tau}}, \quad (2.133)$$

$$m = 1. \quad (2.134)$$

### Trinomický strom cen akcie

Kompletní strom cen akcie při užití trinomického modelu je ilustrován na obrázku 2.11. V čase nula cenu akcie  $S$  známe. V čase  $\Delta\tau = 2\Delta t$  existují tři možné varianty ceny akcie a to buď  $Su$  při nárůstu ceny akcie,  $Sm = S$  při neměnné ceně a  $Sd$  při poklesu ceny akcie; v čase  $2\Delta\tau (= 4\Delta t)$  lze dosáhnout pěti možných různých cen a to  $Suu$ ,  $Sum$ ,  $Smm$ ,  $Smd$  a  $Sdd$ . Obecně v čase  $i\Delta\tau$  existuje  $(2i + 1)$  možných cen podkladové akcie.

Pro snazší orientaci budeme jednotlivé uzly označovat pomocí souřadnic  $(i; j)$ , kde  $i$  určuje počet časových period  $\Delta\tau$  (tedy udává horizontální polohu) a  $j \in \langle -i, i \rangle$  v případě, že nabývá kladné hodnoty určuje počet cenových nárůstu oproti výchozímu bodu  $(0;0)^4$ , v případě, že nabývá záporných hodnot určuje počet cenových poklesů vzhledem k počátku a pokud se rovná nule, znamená to, že cena je na stejné úrovni jako byla na počátku (tedy udává vertikální polohu). Např. uzel  $(3;2)$  znamená, že po třech obdobích došlo ke dvěma cenovým nárůstům ve srovnání s bodem  $(0;0)$ ; je zřejmé že mohlo dojít k těmto situacím  $Smuu$ ,  $Sumu$ ,  $Suum$  (neboť všechny vedou do uzlu  $(3;2)$ ).



<sup>4</sup> Tedy nemusí se jednat o skutečný počet cenových nárůstů, které akcie během daného časového období prodělala, ale pouze o imaginární počet nárůstu vzhledem k počátku.

Obr. 2.11 Trinomický strom pro akcii nevyplácející dividendu

### Oceňování užitím trinomického stromu

Oceňování opcí pomocí trinomického modelu je naprosto analogické k binomickému modelu. Tedy hodnota opce je v čase  $T$  známa. Např. hodnota put opce je  $\max(X - S_T, 0)$  a hodnota call opce  $\max(S_T - X, 0)$ , kde  $S_T$  je cena akcie v čase  $T$  a  $X$  uplatňovaná cena (*strike price*). Protože předpokládáme „risk-neutral world“, hodnota opce v každém uzlu  $T - \Delta\tau$  může být vypočtena jako očekávaná hodnota v čase  $T$  diskontovaná sazbou  $r$  přes časovou periodu  $\Delta\tau$ . Podobně hodnota v každém uzlu v čase  $T - 2\Delta\tau$  je kalkulována jako očekávaná hodnota v čase  $T - \Delta\tau$  diskontována přes časový interval  $\Delta\tau$  (tedy k časovému okamžiku  $T - 2\Delta\tau$ ) bezrizikovou úrokovou sazbou  $r$ . Analogicky jsou počítány hodnoty v předchozích časových okamžicích. Tedy postupně se dostáváme přes všechny uzle k počátku, a tím zjistíme hodnotu opce v čase nula. V případě americké opce je nezbytné v každém uzlu zkontrolovat preference ohledně držby opce po další časovou periodu či jejího předčasného uplatnění.

### Algebraické vyjádření

Předpokládejme, že životnost americké opce na akcie nevyplácející dividendy je rozdělena na  $N$  subintervalů délky  $\Delta\tau$ . Definujme  $f_{ij}$  jako hodnotu dané opce v čase  $i\Delta\tau$ , kdy cena akcie je  $S_{ij}$  pro  $0 \leq i \leq N$  a  $j \in \langle -i, i \rangle$ . Protože hodnota americké put opce v době její splatnosti je  $\max(S_T - X, 0)$ , víme že

$$f_{Nj} = \max(X - S_{Nj}, 0), \quad (2.135)$$

kde  $j \in \langle -N, N \rangle$ .

Existuje pravděpodobnost  $p$  pohybu z uzlu  $(i; j)$  v čase  $i\Delta\tau$  do uzlu  $(i+1; j+1)$  v čase  $(i+1)\Delta\tau$ , pravděpodobnost  $q$  pohybu z uzlu  $(i; j)$  v čase  $i\Delta\tau$  do uzlu  $(i+1; j-1)$  v čase  $(i+1)\Delta\tau$  a pravděpodobnost  $1 - p - q$  pohybu z uzlu  $(i; j)$  v čase  $i\Delta\tau$  do uzlu  $(i+1; j)$  v čase  $(i+1)\Delta\tau$ . Pokud nedojde k předčasnému uplatnění opce, rizikově neutrální ohodnocení je dáno vztahem

$$f_{ij} = e^{-r\Delta\tau} (pf_{i+1, j+1} + (1 - p - q)f_{i+1, j} + qf_{i+1, j-1}) \quad (2.136)$$

pro  $0 \leq i \leq N - 1$  a  $j \in \langle -i, i \rangle$ . Pokud vezmeme v úvahu předčasné uplatnění opce, hodnota  $f_{ij}$  musí být porovnána s vnitřní hodnotou opce, pak získáváme

$$f_{ij} = \max\{X - S_{ij}; e^{-r\Delta\tau} (pf_{i+1, j+1} + (1 - p - q)f_{i+1, j} + qf_{i+1, j-1})\}. \quad (2.137)$$

### 3. Řecké míry (Greeks)

Tyto míry měří riziko plynoucí ze změny těch faktorů, které ovlivňují výši opční prémie. Používají se nejen u opcí, ale i u jiných cenných papírů (např. dluhopisová durace má podobný charakter, neboť měří riziko plynoucí ze změny tržní úrokové míry, která ovlivňuje cenu dluhopisů), ale u opcí je jejich využívání nejrozšířenější. Vzhledem ke svým řeckým názvům se tyto míry rizika někdy souhrnně označují jako *Greeks*. Výpočet jednotlivých měř je jednoduchý, neboť se vesměs jedná o derivace teoretické opční prémie vždy podle příslušného faktoru. Míra tak kvantifikuje přibližnou lineární závislost opční prémie na daném faktoru a většinou se pak také prezentuje jako citlivost opční prémie na změnu tohoto faktoru. [viz Briys (1998)]

#### 3.1 Greeks v B-S modelu

Pro odvození Greeks bude použito značení zavedené při analýze B-S modelu a navíc  $N'(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$  je pravděpodobnostní hustota normálního rozdělení  $N(0;1)$  a z B-S vzorce vyplývá, že:  $S_t \cdot e^{-1/2d_1^2} - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot e^{-1/2d_2^2} = 0$ .

(1) *Míra delta* popisuje citlivost opční prémie na změnu ceny bazického instrumentu:

$$\text{delta}_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d_1) + S_t \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t} - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial S_t}, \quad (3.1)$$

kde

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2d_1^2} \frac{\partial d_1}{\partial S_t},$$

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2d_2^2} \frac{\partial d_2}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2d_2^2} \frac{\partial d_1}{\partial S_t}, \quad (3.3)$$

neboť

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

Po dosazení (3.2) a (3.3) do (3.1) dostaneme:

$$\frac{\partial C_t}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S_t} \left( S_t \cdot e^{-1/2d_1^2} - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot e^{-1/2d_2^2} \right) + N(d_1)$$

a protože výraz v závorce je roven nule (což vyplývá přímo z B-S vzorce), dostáváme:

$$\text{delta}_t^C = N(d_1). \quad (3.4)$$

Analogicky definujeme deltu i pro put opci:

$$\text{delta}_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial S_t} = N(-d_1) + S_t \frac{\partial N(-d_1)}{\partial S_t} + X \cdot e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(-d_2)}{\partial S_t}. \quad (3.5)$$

Protože

$$\frac{\partial N(-d_1)}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2(-d_1)^2} \frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} = -\frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t}$$

a zrovna tak

$$\frac{\partial N(-d_2)}{\partial S_t} = -\frac{\partial N(d_2)}{\partial S_t}$$

dostáváme:

$$\frac{\partial P_t}{\partial S_t} = -N(-d_1) + \left[ S_t \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t} - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial S_t} \right].$$

Výraz v hranatých závorkách je roven nule (opět tak vyplývá přímo z B-S vzorce) a tedy pro delta put opce platí:

$$\text{delta}_t^P = -N(-d_1). \quad (3.6)$$

Navíc dostáváme důležitý vztah mezi delta call opce a delta put opce:

$$\text{delta}_t^C - \text{theta}_t^P = 1. \quad (3.7)$$

(2) *Míra gama* popisuje citlivost míry delta na změnu ceny bazického instrumentu:

$$\text{gama}_t^C = \frac{\partial \text{delta}_t^C}{\partial S_t} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t} = N'(d_1) \cdot \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-1/2d_1^2} \cdot \frac{1}{S_t \cdot \sigma \sqrt{(T-t)}}. \quad (3.8)$$

Protože platí

$$\text{delta}_t^P = \frac{\partial P}{\partial S_t} = -N(-d_1)$$

z pravidel pro derivování dostáváme:

$$\text{gama}_t^P = \frac{\partial \text{delta}_t^P}{\partial S_t} = \frac{-\partial N(-d_1)}{\partial S_t} = \frac{-(-\partial N(d_1))}{\partial S_t} = \frac{\partial \text{delta}_t^C}{\partial S_t} = \text{gama}_t^C. \quad (3.9)$$

(3) *Míra theta* popisuje citlivost opční prémie na změnu doby do splatnosti:

$$theta_t^C = -\frac{\partial C_t}{\partial(T-t)}. \quad (3.10)$$

Protože jak již bylo uvedeno  $d_1$  i  $d_2$  jsou závislé na  $(T-t)$  musíme při výpočtu použít pravidlo pro derivování složených funkcí:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial C_t}{\partial(T-t)} &= -\left[ S_t \cdot \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - X \left( \frac{\partial(e^{-r(T-t)})}{\partial(T-t)} + e^{-r(T-t)} \cdot \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \frac{\partial d_2}{\partial(T-t)} \right) \right] \\ &= -\left[ S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - X \left( -r \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) + e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \left( \frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} - \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} \right) \right) \right] \\ &= -\frac{\partial d_1}{\partial(T-t)} \left[ S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} - X \left( e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \right) \right] - X \left( r \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) + e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} \right) \end{aligned}$$

a protože je první závorka rovna nule, dostaneme konečný vzorec pro thetu call opce:

$$theta_t^C = -X \cdot e^{-r(T-t)} \left( r \cdot N(d_2) + \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \right). \quad (3.11)$$

Derivace distribuční funkce má zřejmě tento tvar:

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial d} = \frac{e^{-1/2d_1^2}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d} = \frac{e^{-1/2d_2^2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Použijeme-li známý vztah  $S_t \cdot e^{-1/2d_1^2} - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot e^{-1/2d_2^2} = 0$  a obě strany rovnice vydělíme

$\sqrt{2\pi}$ , dostaneme:

$$S_t \frac{e^{-1/2d_1^2}}{\sqrt{2\pi}} = X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \frac{e^{-1/2d_2^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

nebo-li



$$S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} = X \cdot e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d}.$$

Použijeme-li výše uvedené vztahy v (3.11), dostaneme tyto ekvivalentní vzorce pro parametr theta call opce:

$$theta_t^C = -X \cdot e^{-r(T-t)} \left( rN(d_2) + \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \right), \quad (3.12)$$

$$theta_t^C = - \left( X \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) + S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} \frac{\sigma}{2\sqrt{(T-t)}} \right), \quad (3.13)$$

$$theta_t^C = -X \cdot e^{-r(T-t)} \left( rN(d_2) + \frac{e^{-1/2d_2^2\sigma}}{2\sqrt{2\pi(T-t)}} \right), \quad (3.14)$$

$$theta_t^C = - \left( X \cdot r \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) + S_t \frac{e^{-1/2d_2^2\sigma}}{2\sqrt{2\pi(T-t)}} \right). \quad (3.15)$$

Vzorec pro thetu put opce dostaneme z put-call parity  $P_t = C_t - S_t + X \cdot e^{-r(T-t)}$ .

Derivujeme-li tuto rovnici podle doby do splatnosti  $(T-t)$  a výsledek vynásobíme  $-1$ , dostaneme:

$$theta_t^P = theta_t^C + r \cdot X \cdot e^{-r(T-t)}. \quad (3.16)$$

Zřejmě jsme získali obecný vzorec pro výpočet parametru theta put opce, známe-li thetu call opce. Přímou můžeme thetu put opce spočítat tak, že do vzorce (3.16) dosadíme za hodnotu theta call opce některý z výrazů (3.12) až (3.15).

(4) *Míra vega* popisuje citlivost opční prémie na změnu volatility ceny bazického instrumentu:

$$\begin{aligned} vega_t^C &= \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = \left[ S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - X \cdot e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \right] \\ &= \left[ S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} - X \cdot e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \right] \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + X \cdot (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} \sqrt{(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Protože je první závorka rovna nule, dostáváme konečný tvar pro vega call opce:

$$vega_t^C = X \cdot e^{-r(T-t)} \sqrt{(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d}. \quad (3.18)$$

Derivace distribuční funkce má tento tvar:

$$\frac{\partial N(d_1)}{\partial d} = \frac{e^{-1/2d_1^2}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\frac{\partial N(d_2)}{\partial d} = \frac{e^{-1/2d_2^2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Použijeme-li známý vztah  $S_t \cdot e^{-1/2d_1^2} - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot e^{-1/2d_2^2} = 0$  a obě strany rovnice vydělíme  $\sqrt{2\pi}$ , dostaneme:

$$S_t \frac{e^{-1/2d_1^2}}{\sqrt{2\pi}} = X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \frac{e^{-1/2d_2^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

nebo-li

$$S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} = X \cdot e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d}.$$

Pokud použijeme všechny uvedené rovnosti ve vztahu (3.18), dostaneme tato ekvivalentní vyjádření pro vega call opce:

$$vega_t^C = X \cdot e^{-r(T-t)} \sqrt{(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d}, \quad (3.18)$$

$$vega_t^C = X \cdot e^{-r(T-t)} \sqrt{(T-t)} \frac{e^{-1/2d_2^2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad (3.19)$$

$$vega_t^C = S_t \cdot \sqrt{(T-t)} \frac{\partial N(d_1)}{\partial d}, \quad (3.20)$$

$$vega_t^C = S_t \cdot \sqrt{(T-t)} \frac{e^{-1/2d_1^2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (3.21)$$

Vega put opce je definována opět jako derivace put opce podle  $\sigma$ . Pro vyjádření put opce je výhodné použít put-call paritu:

$$P_t = C_t - S_t + X \cdot e^{-r(T-t)}.$$

A jelikož ani  $S_t$ , ani  $X \cdot e^{-r(T-t)}$  nezávisí na  $\sigma$ , je jejich derivace podle  $\sigma$  nulová a tudíž platí:

$$vega_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial \sigma} = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} - \frac{\partial S_t}{\partial \sigma} + \frac{\partial (r \cdot X \cdot e^{-r(T-t)})}{\partial \sigma} = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = vega_t^C. \quad (3.22)$$

(5) *Míra rho* popisuje citlivost opční prémie na změnu bezrizikové úrokové míry:

$$\begin{aligned}
rho_t^C &= \frac{\partial C_t}{\partial r} \\
&= \left[ S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} \frac{\partial d_1}{\partial r} - X \left( -(T-t) \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) + e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \frac{\partial d_2}{\partial r} \right) \right] \\
&= \left[ S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial d} - X \cdot e^{-r(T-t)} \frac{\partial N(d_2)}{\partial d} \right] \frac{\partial d_1}{\partial r} + X \cdot (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Při odvození byl použit vztah:

$$\frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\partial d_1}{\partial r}.$$

Protože je první závorka rovna nule, konečný vzorec pro rho call opce je:

$$rho_t^C = X \cdot (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2). \tag{3.24}$$

Rho put opce je opět definováno jako derivace put opce podle  $r$ . Pro odvození rho put opce je opět výhodné použít put-call paritu  $P_t = C_t - S_t + X \cdot e^{-r(T-t)}$ .

Protože  $S_t$  nezávisí na  $r$ , je derivace  $S_t$  podle  $r$  nulová a tudíž:

$$\begin{aligned}
rho_t^P &= \frac{\partial P_t}{\partial r} = \frac{\partial C_t}{\partial r} - \frac{\partial S_t}{\partial r} + \frac{\partial (X \cdot e^{-r(T-t)})}{\partial r} \\
&= rho_t^C - 0 - (T-t) \cdot X \cdot e^{-r(T-t)} (N(d_2) - 1) = -X \cdot (T-t) \cdot e^{-r(T-t)} N(-d_2).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

### 3.2 Greeks v Garman-Kohlhagenově modelu

Odvození Greeks v G-K modelu je analogické k B-S modelu, proto již budou uvedeny pouze výsledné vzorce.

$$delta_t^C = e^{-r_f(T-t)} N(d_1), \tag{3.26}$$

$$gama_t^C = \frac{\partial delta_t^C}{\partial S_t} = \frac{e^{-r_f(T-t)}}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}} N'(d_1), \tag{3.27}$$

$$theta_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial (T-t)} = -r_f S_t e^{-r_f(T-t)} N(d_1) + r X e^{-r(T-t)} N(d_2) + \frac{X e^{-r(T-t)} \sigma N'(d_2)}{\sqrt{(T-t)}}, \tag{3.28}$$

$$vega_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = X e^{-r_f(T-t)} \sqrt{(T-t)} N'(d_2), \tag{3.29}$$

$$rho_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial r} = -(T-t) S_t e^{-r_f(T-t)} N(d_1), \tag{3.30}$$

$$delta_t^P = -e^{-r_f(T-t)} [N(-d_1) + 1], \tag{3.27}$$

$$gama_t^P = \frac{\partial \delta \Delta_t^P}{\partial S_t} = \frac{e^{-r_f(T-t)}}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}} N'(d_1), \quad (3.28)$$

$$theta_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial(T-t)} = -r_f S_t e^{-r_f(T-t)} N(-d_1) + r X e^{-r(T-t)} N(-d_2) + \frac{X e^{-r(T-t)} \sigma N'(d_2)}{\sqrt{(T-t)}}, \quad (3.29)$$

$$vega_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial \sigma} = X e^{-r_f(T-t)} \sqrt{(T-t)} N'(d_2), \quad (3.30)$$

$$rho_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial r} = (T-t) X e^{-r_f(T-t)} N(-d_2). \quad (3.31)$$

### 3.3 Greeks v Mertonově, Baron-Adesi a Whaleyově modelu

$$\delta \Delta_t^C = e^{(b-r)(T-t)} N(d_1), \quad (3.32)$$

$$gama_t^C = \frac{\partial \delta \Delta_t^C}{\partial S_t} = \frac{e^{(b-r)(T-t)}}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}} N'(d_1), \quad (3.33)$$

$$theta_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial(T-t)} = (b-r) S_t e^{(b-r)(T-t)} N(d_1) + r X e^{-r(T-t)} N(d_2) + \frac{X e^{-r(T-t)} \sigma N'(d_2)}{2\sqrt{(T-t)}}, \quad (3.34)$$

$$vega_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial \sigma} = X e^{-r(T-t)} \sqrt{(T-t)} N'(d_2), \quad (3.35)$$

$$rho_t^C = \frac{\partial C_t}{\partial r} = -(T-t) S_t e^{-r(T-t)} N(d_1), \quad (3.36)$$

$$\delta \Delta_t^P = -e^{(b-r)(T-t)} [N(-d_1) + 1], \quad (3.37)$$

$$gama_t^P = \frac{\partial \delta \Delta_t^P}{\partial S_t} = \frac{e^{(b-r)(T-t)}}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}} N'(d_1), \quad (3.38)$$

$$theta_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial(T-t)} = (b-r) S_t e^{(b-r)(T-t)} N(-d_1) + r X e^{-r(T-t)} N(-d_2) + \frac{X e^{-r(T-t)} \sigma N'(d_2)}{2\sqrt{(T-t)}}, \quad (3.39)$$

$$vega_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial \sigma} = X e^{-r(T-t)} \sqrt{(T-t)} N'(d_2), \quad (3.40)$$

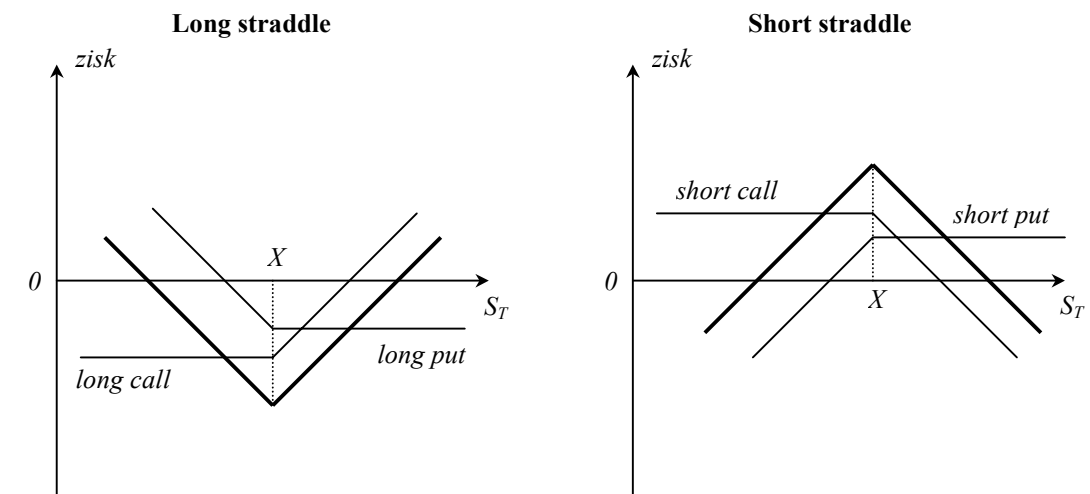
$$rho_t^P = \frac{\partial P_t}{\partial r} = (T-t) X e^{-r(T-t)} N(-d_2). \quad (3.41)$$

## 4. Kombinace opcí

Opcce se v praxi nejrůznějším způsobem kombinují nejen s jinými cennými papíry, ale také mezi sebou. Tím způsobem lze realizovat různé strategie podle očekávání budoucího vývoje trhu [viz Dědek (2002)].

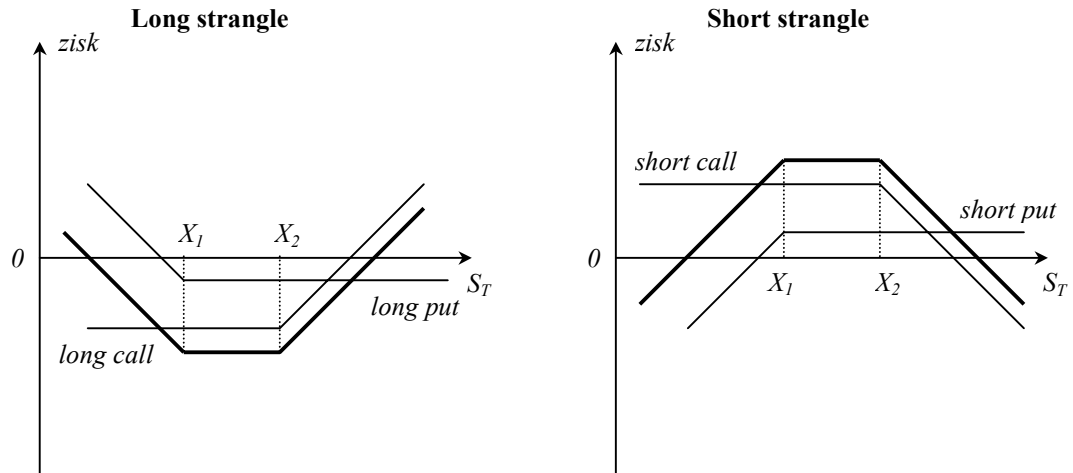
### 4.1 Kombinace kupních a prodejních opcí

(1) *Straddle* (*V-kombinace, vidlička*) je příkladem *kombinace stejných pozic call a put se stejnou realizační cenou* viz obr. 4.1 (např. long straddle je kombinace long call a long put). Přitom *long straddle* je ziskový při větším vychýlení ceny bazického instrumentu pod či nad realizační cenu opce (tuto strategii tedy volí investor očekávající rostoucí cenovou volatilitu bazického instrumentu) a *short straddle* je ziskový při cenové stabilitě bazického instrumentu (tuto strategii volí naopak investor očekávající stabilní stav).



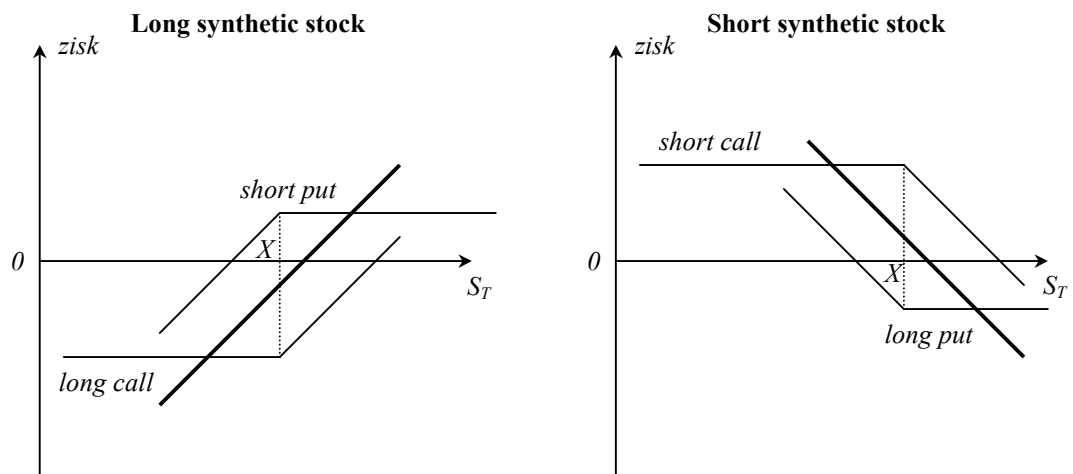
Obr. 4.1 Straddle

(2) *Strangle* (*U-kombinace, škrtič*) je příkladem *kombinace stejných pozic call a put s rozdílnou realizační cenou* viz obr. 4.2 (např. long strangle je kombinace long put s realizační cenou  $X_1$  a long call s realizační cenou  $X_2$  pro  $X_1 < X_2$ ). Přitom použití strangle je analogické jako použití straddle s tím, že maximální ztráta (resp. zisk) nastává u long (resp. short) strangle pro celý interval cen bazického instrumentu a není tedy omezena na jediný bod jako u straddle.



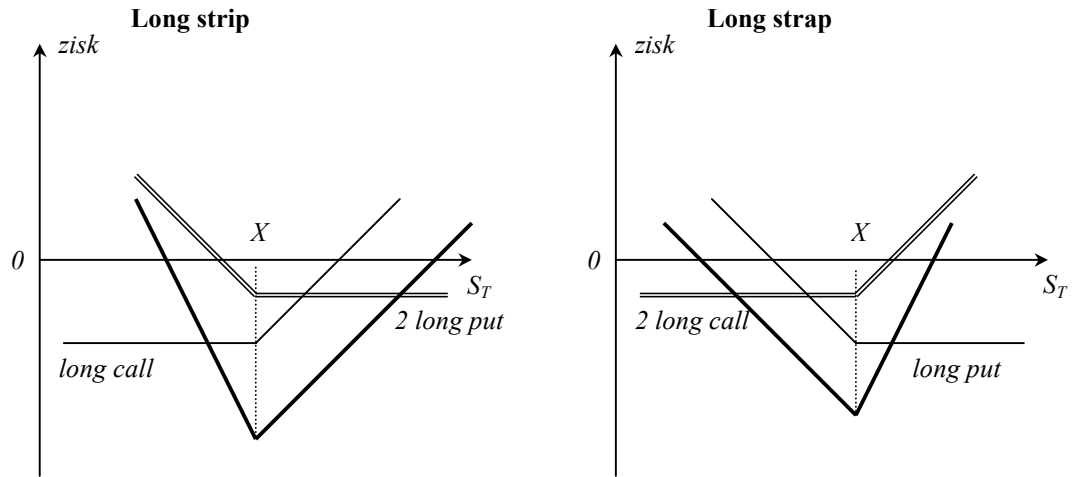
Obr. 4.2 Strangle

(3) *Synthetic stock (syntetická akcie)* je příkladem kombinace opačných pozic call a put se stejnou realizační cenou viz obr. 4.3 (např. long synthetic stock je kombinace long call a long put). Přitom vzhledem k tvaru závislosti zisku z takové kombinace opcí na ceně bazického instrumentu zřejmě *long synthetic stock* odpovídá reálnému zakoupení bazického instrumentu (tuto strategii volí investor očekávající růst ceny bazického instrumentu) a *short synthetic stock* odpovídá reálnému prodeji bazického instrumentu (tuto strategii volí naopak investor očekávající pokles ceny bazického instrumentu).



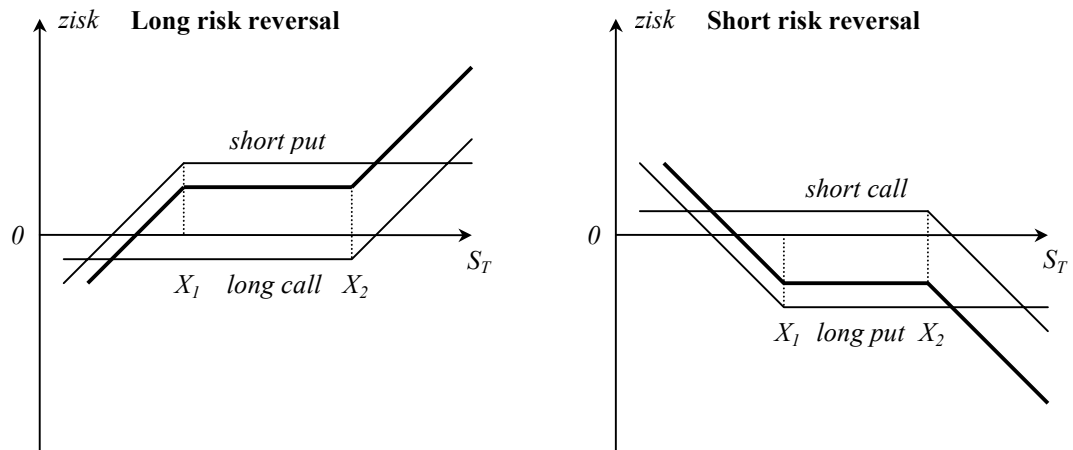
Obr. 4.3 Synthetic stock

(4) *Proužek (strip)*, *řemínek (strap)* jsou agresivnějšími obměnami vidličky viz obr. 4.4 (long strip je kombinace 1 long call a 2 long put; long strap je kombinací 2 long call a 1 long put).



Obr. 4.4 Strip &amp; strap

(5) *Risk reversal* je příkladem kombinace opačných pozic call a put s rozdílnou realizační cenou viz obr. 4.5 (např. long risk reversal je kombinace short put s realizační cenou  $X_1$  a long call s realizační cenou  $X_2$  pro  $X_1 < X_2$ ). Přitom *long risk reversal* je ziskový při růstu ceny bazického instrumentu nad  $X_2$ , zatímco při poklesu ceny bazického instrumentu pod  $X_1$  dochází ke ztrátě (tuto strategii tedy volí „býk“ přesvědčený o cenovém růstu bazického instrumentu).

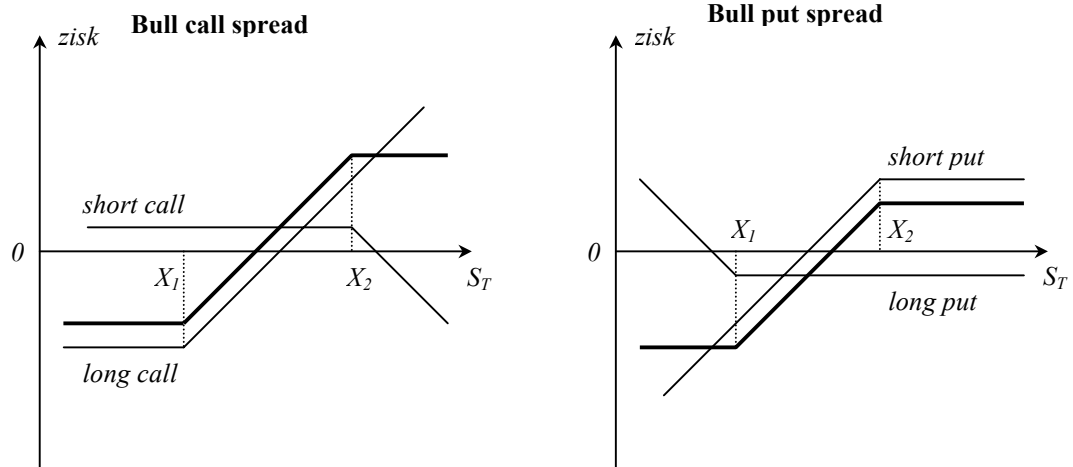


Obr. 4.5 Risk reversal

## 4.2 Kombinace pouze kupních nebo pouze prodejních opcí

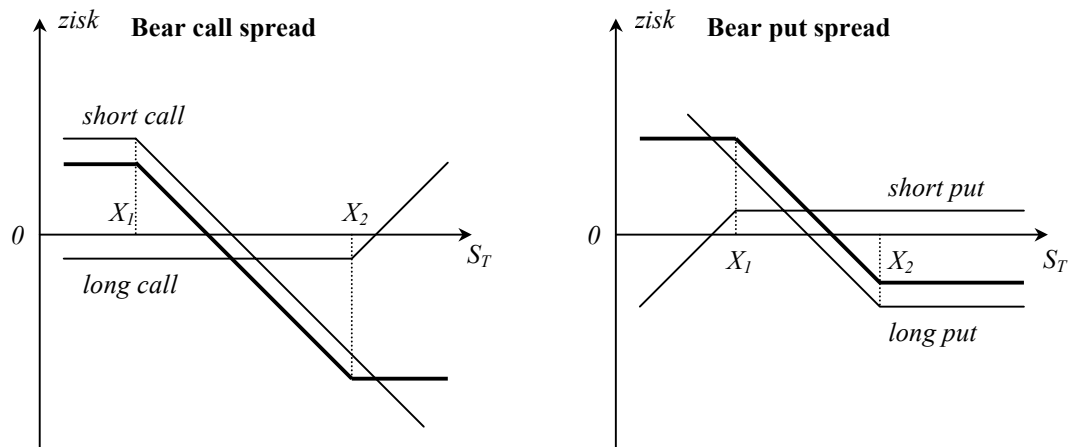
(1) *Bull spread* (býčí spread) je příkladem kombinace opačných pozic call nebo opačných pozic put s rozdílnou realizační cenou viz obr. 4.6 (např. bull call spread je kombinace long call s realizační cenou  $X_1$  a short call s realizační cenou  $X_2$  pro  $X_1 < X_2$ ).

Přitom strategii *bull call spread* volí investor očekávající mírný růst ceny bazického instrumentu („býci“ spekulují na cenový či kursový vzestup), který chce zisk z pozice long call zvýšit o zisk z pozice short call. Strategie *bull put spread* je analogická.



Obr. 4.6 Bull spread

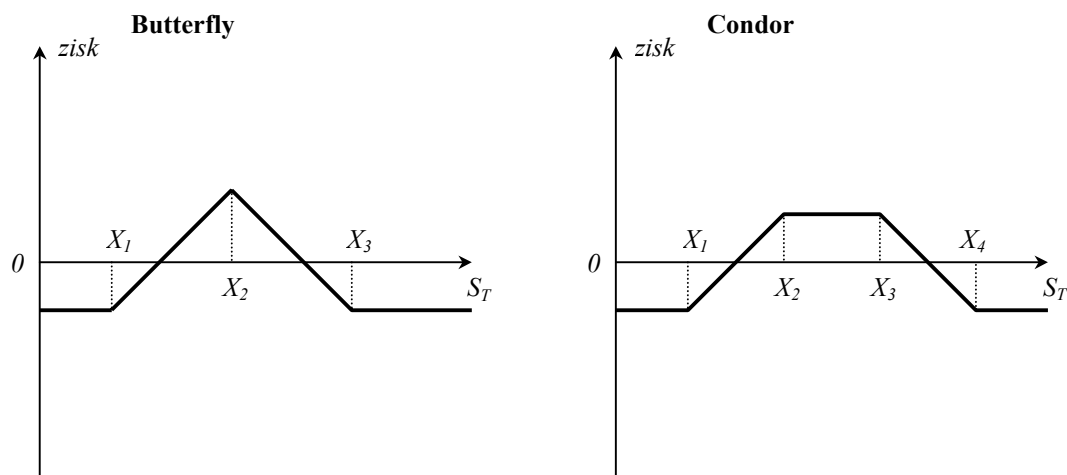
(2) *Bear spread* (*medvědí spread*) je zcela analogický strategii bull spread viz obr. 4.7 (např. bear call spread je kombinace short call s realizační cenou  $X_1$  a long call s realizační cenou  $X_2$  pro  $X_1 < X_2$ ) s tím rozdílem, že tuto strategii volí „medvědi“ spekulující na cenový pokles.



Obr. 4.7 Bear spread

(3) *Long butterfly* (*dlouhý motýlek*) viz obr. 4.8 se používá, jestliže investor věří, že nenastanou výrazné změny kursu akcie. Vytváří se pomocí kombinace long call s prováděcí cenou  $X_1$ , 2 short call s prováděcí cenou  $X_2$  a long call s prováděcí cenou  $X_3$  ( $X_1 < X_2 < X_3$ ).



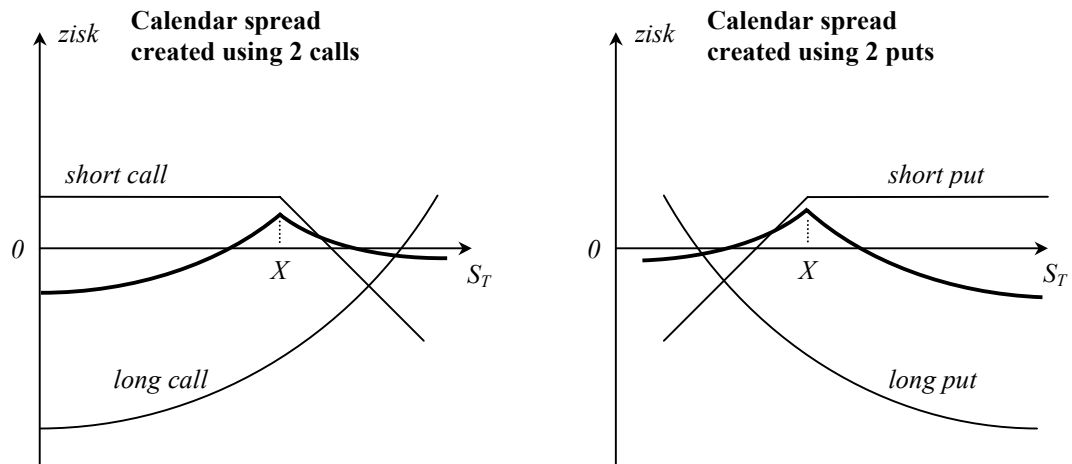


Obr. 4.8 Butterfly &amp; Condor

(4) *Long condor (dlouhý kondor)* viz obr. 1.17 se podobá strategii butterfly. Skládá se z kombinace *long call* s prováděcí cenou  $X_1$ , *short call* s prováděcí cenou  $X_2$ , *short call* s prováděcí cenou  $X_3$  a *long call* s prováděcí cenou  $X_4$  ( $X_1 < X_2 < X_3 < X_4$ ). Condor se tedy liší od butterfly prodanými opcemi. Butterfly prodávala opce se stejnou realizační cenou, condor prodává opce s cenami různými. Lze říci, že butterfly dává nejvyšší zisk, je-li cena akcie v době expirace rovna střední realizační ceně a s rostoucí odchylkou zisk rovnoměrně klesá. Condor dává stejný zisk na střední části profitujícího intervalu. Kterou z těchto dvou strategií investor zvolí, závisí na subjektivním odhadu hustoty budoucí spotové ceny akcie. Je-li očekávána hustota podobná normálnímu rozdělení, zvolí se strategie butterfly, očekává-li se rovnoměrné rozdělení, zvolí se condor.

(5) *Calendar spread (kalendářní rozpětí, [Blaha (1997)])* viz obr. 4.9 je typem opčních strategií, u nichž se termín splatnosti různí: opce, ve kterých investor zaujímá pozice – jak dlouhé, tak krátké – mají rozdílnou dobu splatnosti.<sup>5</sup> Na druhé straně mají opce stejnou uplatňovací cenu. Kalendářní spread je konstruován tak, že investor vystaví (prodá) „krátkodobou“ opci *call* a koupí „dlouhodobou“ opci *call*. V případě, že předmětné aktivum, které obě opce podkládá, neplatí dividendy, úroky, resp. jiné pravidelné výnosy, lze usoudit, že čím delší doba platnosti, tím vyšší opční prémie. Strategie kalendářní spread tedy vyžaduje počáteční investici, která pramení z rozdílu opčních premií.

<sup>5</sup> Pro usnadnění problému budou opce s kratší dobou splatnosti nazývány „krátkodobé“ (short-maturity). Krátkodobé opci zbývají např. 3 měsíce do vypršení, zatímco dlouhodobá opce má životnost delší, např. 6 měsíců.



Obr. 4.9 Calendar spread

Celkový ziskový profil se podobá profilu u strategie butterfly spread sestavené s pomocí opcí call s tím rozdílem, že obrazec kalendářního rozpětí zahrnuje nelineární části, neboť již neplatí předpoklad symetrie z hlediska času vyprchání opcí.

Potenciální zisk i ztráta jsou ohraničeny. V případě, že v okamžiku vypršení platnosti „krátkodobé“ opce call, ve které má investor krátkou pozici, se cena bazické akcie přibližně rovná uplatňovací ceně  $X$ , tato strategie vyústí v zisk: plná čára zakreslující ziskový profil se nachází nad horizontální osou. V případě, že  $S_T$  (kurs bazické akcie v okamžiku splatnosti „krátkodobé“ opce call) se rovná realizační ceně  $X$  je zisk nejvyšší. „Krátkodobá“ opce, ve které má investor krátkou (short) pozici, vyprchává bezcenná – je přesně „at the money“ – zatímco, „dlouhodobé“ opci zbývá ještě určitý čas do vyprchání: její tržní cena tedy bude odrážet časovou „spekulativní“ prémii, o které podle obrázku 1.18 předpokládáme, že převyšuje počáteční náklad na strategii. Investor ji za tuto prémii prodá a tím celou strategii uzavře.

Pokud v době splatnosti „krátkodobé“ opce call je cena předmětné akcie mnohem nižší než bod  $X$ , je strategie ztrátová. „Krátkodobá“ opce, ve které má investor short pozici, vyprchává bezcenná – opce call je „out of the money“. Tržní cena „dlouhodobé“ opce call se však blíží nule, protože tato opce je tzv. „deep out of the money“ (hluboce „mimo peníze“) přesto, že jí zbývá určitý čas do vypršení. Původní investice – náklad vynaložený na rozdíl v opčních premiích – převyšuje tržní cenu „dlouhodobé“ opce: investor zaznamená ztrátu.

V případě, že  $S_T$  je mnohem vyšší než realizační cena  $X$  je strategie opět ztrátová. „Krátkodobá“ opce call bude – proti investorovi – uplatněna: jeho ztráta se bude rovnat částce, ve které tato opce bude „in the money“ (zisk však plyne kupujícímu této opce). Výše premie „dlouhodobé“ opce, ve které má investor dlouhou (long) pozici, sice tuto částku

převyšuje, ale o méně, než činil počáteční náklad (initial investment). Na obrázku je tato ztráta zakreslena tučnou čarou, která se nachází pod horizontální osou. Je zřejmé, že strategie kalendářní spread je zisková za předpokladu nízké volatility, tj. malého cenového rozptylu aktiva, které opce podkládá.

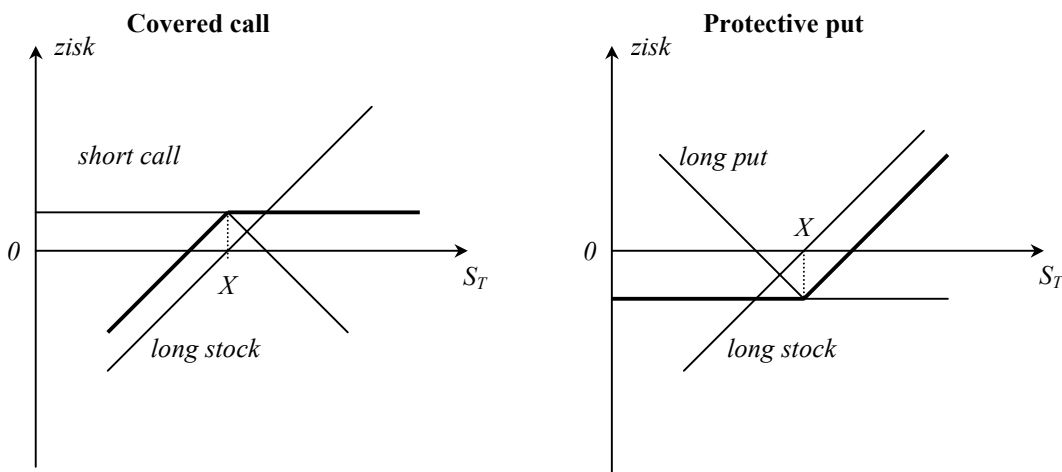
Pokud se v době zaujmutí pozic – otevření této strategie – nachází tržní cena předmětné akcie  $S$  blízko uplatňovací ceny  $X$ , mluvíme o tzv. *neutrálním kalendářním rozpětí*.

Jako ostatně u všech strategií je i zde možné vytvořit kalendářní rozpětí za pomoci dvou opcí třídy put. Tato strategie je konstruována tak, že investor vystaví (prodá) „krátkodobou“ opci put a koupí „dlouhodobou“ opci put.

Konečně, kalendářní rozpětí popsaná v této části skýtají – stejně jako jiné strategie – možnosti reverze. Výsledné obrazce budou inverzní podle horizontální osy vůči kalendářním rozpětím popsaným výše. V praktické rovině by to znamenalo zaujmutí dlouhé (long) pozice v „krátkodobé“ opci a krátké (short) pozice v „dlouhodobé“ opci stejné třídy za jinak stejných podmínek. V případě velkého rozptylu ceny předmětného aktiva – tj. vysoké rizikovosti – by byla tato strategie zisková. Naopak v situaci, kde se cena předmětné akcie podkládající obě opce při vypršení platnosti „krátkodobé“ opce nachází v blízkosti uplatňovací ceny  $X$ , inverzní strategie kalendářního rozpětí by přinesla ztrátu. Maximální ztráta by nastala v situaci, kdy  $S_T$  se rovná  $X$ .

### 4.3 Kombinace opcí s podkladovým aktivem

(1) *Covered call* (pokrytá kupní opce) viz obr. 4.10 se používá na posílení výnosů portfolia akcií o příjem z prodaných opcí (čili jde o zajištění (hedging) portfolia proti mírnému poklesu hodnoty akcií). Investor neparticipuje na výrazném růstu cen akcií.



Obr. 4.10 Covered call & Protective put

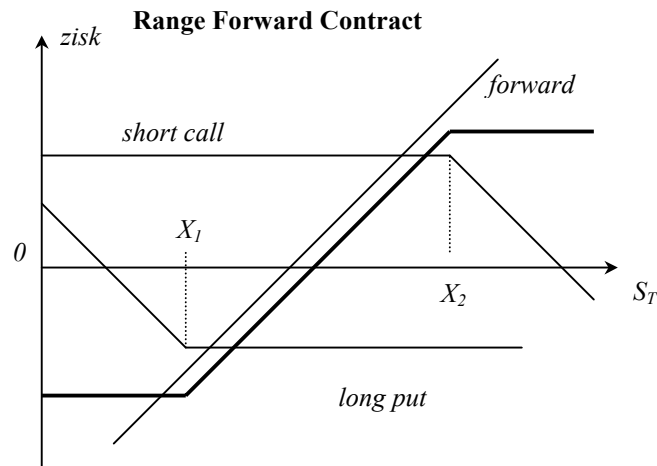
(2) *Protective put (ochranná prodejní opce)* viz obr. 4.10 je analogií pojištění akciového portfolia. V případě příznivého vývoje je koncová hodnota portfolia nižší o „zaplacené pojistné“; v případě nepříznivého vývoje je garantována nejvýše možná ztráta.

## 5. Exotické opce

Deriváty s komplikovanějšími výplatami než mají standardní evropské či americké opce jsou často zmiňovány jako *exotické opce* (*exotic option*). Zpravidla bývají obchodovány na *OTC* (*over the counter*) trzích. Jsou konstruovány finančními institucemi, aby uspokojily individuální požadavky trhu. Někdy jsou také přidávány k emisím obligací, aby je učinily atraktivnějšími na trhu. Některé finanční instituce obchodují s exotickými opcemi velmi „agresivně“ a jsou připraveny udat cenu pro téměř každý obchod navržený jejich klientem.

### 5.1 Packages [Hull (1991)]

*Package* je portfolio skládající se ze standardních evropských opcí call, standardních evropských opcí put, forwardového kontraktu, hotovosti a podkladového aktiva. Finanční instituce často vytvářejí *package*, jehož počáteční náklady jsou nulové. Takový produkt je potom podobný forwardovému kontraktu nebo swapu v tom, že může vést k pozitivní nebo negativní výplatě. Jedním příkladem takového *zero-cost package* je *range forward contract*. Skládá se z dlouhého forwardového kontraktu kombinovaného s dlouhou pozicí put a krátkou pozicí call. Viz obr. 5.1. Realizační ceny jsou voleny tak, aby se hodnota call rovnala hodnotě put. Protože hodnota forwardového kontraktu je nulová, hodnota celého *package* je rovněž nula. Obyčejná opce může být konvertována do *zero-cost* produktu odložením platby za opci do dospělosti. Jestliže  $c$  jsou náklady opce, pokud je platba uskutečněna na počátku, pak  $A = ce^{r(T-t)}$  jsou náklady opce, pokud je platba uskutečněna v době její dospělosti. Výplatu z opce lze pak zapsat jako  $\max(S - X, 0) - A$  nebo  $\max(S - X - A, -A)$ . V případě, že se uplatňovací cena  $X$  rovná forwardové ceně, alternativními názvy pro odloženou platbu za opci jsou *break forward*, *Boston option*, *forward with optional exit* a *cancellable forward*.



Obr. 5.1 Konstrukce Range Forward Contract

## 5.2 Nonstandard American Options [Briys (1998)]

Standardní americká opce může být uplatněna kdykoliv během své životnosti, přičemž realizační cena zůstává konstantní. V praxi se obchodují americké opce, které nemají vždy tyto standardní prvky. Jeden z typů nestandardních amerických opcí je znám jako *Bermudan option*. V tomto případě je předčasné uplatnění opce omezeno určitým obdobím životnosti opce. Příkladem *Bermudan option* je *American swap option*, která může být uplatněna pouze ve stanoveném období (*reset dates*). Jiným typem nestandardních amerických opcí jsou *warranty* emitovány společnostmi na její vlastní akcie. Jde často o případ, kdy předčasné uplatnění je možné během určité části životnosti opce, ale ne během celého období. Někdy se stane, že uplatňovací cena roste s časem. Například u 5-letého warrantu uplatňovací cena může být 30 USD v prvních dvou letech, 32 USD během dalších 2 let a 33 USD po zbývajícím roce.

## 5.3 Forward Start Options [Rubinstein (1991a)]

*Forward start options* jsou opce, za které se platí okamžitě, ale začnou běžet až od nějakého okamžiku v budoucnosti. Termíny opce jsou voleny tak, aby opce byla *at-the-money* v době, kdy začíná běžet. Uvažujme *forward start call option*, která začne běžet *at-the-money* v čase  $t_1$  a dospěje v čase  $t_2$  a podkladovým aktivem je dividendy nevyplácející akcie. Předpokládejme, že běžný čas (*current time*) je  $t$ , běžná cena akcie (*current stock price*) je  $S$  a cena akcie v čase  $t_1$  je  $S_1$ . K ohodnocení opce použijeme implikaci Blackovy-Scholesovy

formule, že hodnota *at-the-money* call opce je proporcionální ceně akcie. Tudíž hodnota *forward start option* v čase  $t_1$  je  $cS_1/S$ , kde  $c$  je dnešní hodnota *at-the-money* opce, která platí po  $t_2 - t_1$ . Užitím rizikově neutrálního ohodnocení získáváme dnešní hodnotu *forward start option* jako

$$e^{-r(t_1-t)} \hat{E} \left[ c \frac{S_1}{S} \right], \quad (5.1)$$

kde  $\hat{E}$  značí očekávání v rizikově neutrálním světě. Protože  $c$  a  $S$  jsou známy a  $\hat{E}[S_1] = Se^{r(t_1-t)}$ , platí, že hodnota *forward start option* je  $c$ . Jinými slovy, hodnota *forward start option* je přesně rovna hodnotě obyčejné *at-the-money* opci se stejnou životností jako má *forward start option*. Jestliže se očekává, že akcie bude vyplácet dividendy při sazbě  $\delta$ , pak vzorec  $\hat{E}[S_1] = Se^{r(t_1-t)}$  přechází do tvaru  $\hat{E}[S_1] = Se^{(r-\delta)(t_1-t)}$  a předchozí analýza ukazuje, že hodnota *forward start option* je  $ce^{-\delta(t_1-t)}$ .

#### 5.4 Compound Options [Geske (1979)]

*Compound options* jsou opce na opce. Existují čtyři hlavní typy *compound options*: *call* na *call*, *put* na *call*, *call* na *put* a *put* na *put*. *Compound options* mají dvě uplatňovací ceny (*strike prices*) a dvě realizační data (*exercise dates*). Uvažujme například *call* na *call*. Na první realizační datum  $T_1$  je držitel *compound option* oprávněn k platbě první uplatňovací ceny  $X_1$  a obdržení *call* opce. *Call* opce dává svému držiteli právo koupit podkladové aktivum za uplatňovací cenu  $X_2$  na druhé realizační datum  $T_2$ . *Compound option* bude uplatněna na první *exercise date* pouze tehdy, jestliže hodnota opce k tomuto datu je větší než první realizační cena.

Pokud předpokládáme obvyklý geometrický Brownův pohyb, *Europeanstyle compound options* mohou být ohodnoceny analyticky ve tvaru integrálů bivarietního normálního rozdělení. Při použití zavedeného značení je hodnota evropské *call* opce na *call* opci v čase nula

$$Se^{-\delta T_2} M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - X_2 e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} X_1 N(a_2), \quad (5.2)$$

kde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln(S/S^*) + (r - \delta + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}; \\ a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T_1}; \\ b_1 &= \frac{\ln(S/X_1) + (r - \delta + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}; \\ b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{T_2}. \end{aligned}$$

$M$  je distribuční funkce dvourozměrného normálního rozdělení;  $S^*$  je taková cena akcie v čase  $T_1$ , pro kterou se cena opce v čase  $T_1$  rovná  $X_1$ . Jestliže je aktuální cena v čase  $T_1$  vyšší než  $S^*$ , pak bude první opce realizována, pokud není vyšší než  $S^*$  opce vyprší bezcenná.

Užitím zavedeného značení dostáváme pro hodnotu evropské put na call vztah

$$X_2 e^{-rT_2} M(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) - S e^{-\delta T_2} M(-a_1, b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} X_1 N(-a_2), \quad (5.3)$$

pro hodnotu evropské call na put

$$X_2 e^{-rT_2} M(-a_2, -b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - S e^{-\delta T_2} M(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} X_1 N(-a_2), \quad (5.4)$$

pro hodnotu evropské put na put

$$S e^{-\delta T_2} M(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) - X_2 e^{-rT_2} M(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) + e^{-rT_1} X_1 N(a_2). \quad (5.5)$$

### Proces výpočtu $M$

Funkce  $M(a, b; \rho)$  je kumulativní pravděpodobnost standardizovaného dvourozměrného normálního rozdělení, že první proměnná je menší než  $a$  a druhá proměnná menší než  $b$ , když je koeficient korelace mezi těmito proměnnými roven  $\rho$ . Drezner (1978) poskytuje skutečně snadný způsob jak naprogramovat počítač pro výpočet  $M(a, b; \rho)$  s přesností na čtyři desetinná místa. Jestliže  $a \leq 0$ ;  $b \leq 0$  a  $\rho \leq 0$ ,

$$M(a, b; \rho) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \sum_{i,j=1}^4 A_i A_j f(B_i, B_j), \quad (5.6)$$



kde

$$f(x, y) = \exp[a'(2x - a') + b'(2y - b') + 2\rho(x - a')(y - b')],$$

$$a' = \frac{a}{\sqrt{2(1 - \rho^2)}},$$

$$b' = \frac{b}{\sqrt{2(1 - \rho^2)}}.$$

$$A_1 = 0,3253030$$

$$A_2 = 0,4211071$$

$$A_3 = 0,1334425$$

$$A_4 = 0,006374323$$

$$B_1 = 0,1337764$$

$$B_2 = 0,6243247$$

$$B_3 = 1,3425378$$

$$B_4 = 2,262645$$

V případě, kdy součin  $a$ ,  $b$  a  $\rho$  je záporný nebo nulový, může být použita jedna z následujících identit:

$$M(a, b; \rho) = N(a) - M(a, -b; -\rho) \quad (5.7)$$

$$M(a, b; \rho) = N(b) - M(-a, b; -\rho) \quad (5.8)$$

$$M(a, b; \rho) = N(a) + N(b) - 1 + M(-a, -b; \rho) \quad (5.9)$$

V případě, kdy součin  $a$ ,  $b$  a  $\rho$  je kladný, použijeme identitu:

$$M(a, b; \rho) = M(a, 0; \rho_1) + M(b, 0; \rho_2) - \xi \quad (5.10)$$

ve spojení s předchozími výsledky, kde

$$\rho_1 = \frac{(\rho a - b) \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}}, \quad \rho_2 = \frac{(\rho b - a) \operatorname{sgn}(b)}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}}$$

$$\xi = \frac{1 - \operatorname{sgn}(a) \operatorname{sgn}(b)}{4}, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{když } x \geq 0 \\ -1 & \text{když } x < 0 \end{cases}$$

## 5.5 „As You Like It“ Options [Hull (1991)]

„As you like it“ opce se vyznačuje tím, že se její držitel rozhodne až po specifické době, zda opce bude call či put. Předpokládejme, že  $t_1$  je čas, ve kterém je uskutečněno rozhodnutí o typu opce. Hodnota „as you like it“ opce v tomto čase je

$$\max(c, p), \quad (5.11)$$

kde  $c$  (resp.  $p$ ) je hodnota call (resp. put) opce podkládající opci „as you like it“. Jestliže obě opce podkládající „as you like it“ option jsou evropské a mají stejné realizační ceny, pak k ohodnocení „as you like it“ opce lze využít *put-call parity*. Předpokládejme, že  $S_1$  je cena

akcie v čase  $t_1$ ,  $X$  je realizační cena,  $t_2$  je čas dospělosti (*maturity*) podkládajících opcí a  $r$  je bezriziková úroková míra. Put-call parita implikuje

$$\begin{aligned}\max(c, p) &= \max(c, c + Xe^{-r(t_2-t_1)} - S_1 e^{-\delta(t_2-t_1)}) \\ &= c + e^{-\delta(t_2-t_1)} \max(0, Xe^{-(r-\delta)(t_2-t_1)} - S_1).\end{aligned}\quad (5.12)$$

Z výše uvedeného vyplývá, že tato „*as you like it*“ option je *package* skládající se z:

- (1) call opce s uplatňovací cenou  $X$  a dospělostí  $t_2$ ,
- (2)  $e^{-\delta(t_2-t_1)}$  kusů put opcí s uplatňovací cenou  $Xe^{-(r-\delta)(t_2-t_1)}$  a dospělostí  $t_1$ .

Opce „*as you like it*“ se stávají komplikovanějšími, pokud podkládající call a put nemají stejnou realizační cenu a dobu do dospělosti (*time to maturity*). Potom nejsou *package*, ale mají stejné typy prvků jako *compound option*.

## 5.6 Barrier Option [Broadie (1997)]

*Barrier options* jsou opce, u kterých výplata závisí na tom, zda-li cena podkladového aktiva dosáhne určité úrovně (*certain level*) během určitého časového období. Příkladem jsou *CAPs* obchodované na CBOT. Jde o opce konstruované tak, že výplata nemůže přesáhnout 30 USD. *Call CAP* automaticky vyprší v den, kdy se index uzavírá na více než 30 USD nad realizační cenou. Podobně *put CAP* automaticky vyprší v den, kdy se index uzavírá na více než 30 USD pod realizační cenou. Jiným typem *barrier option* je *knockout option*. Tato je podobná obyčejné opci až na to, že když cena podkladového aktiva dosáhne určité bariéry  $H$ , opce přestává existovat. V případě *call knockout*, je bariéra obecně pod realizační cenou ( $H < X$ ). Opce je pak někdy nazývána jako *down-and-out option*. V případě *put knockout* ( $H > X$ ) a opce je označována jako *up-and-out option*. Na rozdíl *down-and-in option* je call, která začne existovat, pouze když je dosažena bariéra  $H$ , ( $H < X$ ). Podobně *up-and-in option* je put, která začne existovat pouze až po dosažení bariéry  $H$ , ( $H > X$ ).

Pokud předpokládáme geometrický Brownův pohyb a zavedené značení, hodnota evropské *down-and-in call* opce v čase nula je

$$Se^{-\delta T} (H/S)^{2\lambda} N(y) - Xe^{-rT} (H/S)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T}) \quad (5.13)$$

a hodnota evropské *up-and-in put* opce

$$Xe^{-rT} (H/S)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T}) - Se^{-\delta T} (H/S)^{2\lambda} N(-y), \quad (5.14)$$

kde

$$\lambda = \frac{r - r_f + \sigma^2/2}{\sigma^2},$$

$$y = \frac{\ln[H^2/(SX)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}.$$

Obyčejná call opce je suma cen odpovídajících *down-and-out* a *down-and-in* opcí. Cena evropské *down-and-out* call opce je tudíž rovna ceně obyčejné evropské call opce méně cena odpovídající *down-and-in* call. Podobně cena evropské *up-and-out* put opce je cena regulární evropské opce put méně cena odpovídající *up-and-in* put opce.

Pro účely testování dosažení bariéry  $H$  je důležitá frekvence pozorování ceny aktiva  $S$ . Analytické vyjádření je založeno na předpokladu, že cena aktiva je pozorována spojitě. Často je však ve smlouvách inkorporováno, že cena je měřena jednou denně. Např. u *S&P CAPs* je cena  $S$  pozorována denně při uzavírání obchodování.

## 5.7 Binary Options [Briys (1998)]

*Binary options* jsou opce s nespojitými výplatami. Jednoduchým příkladem je *cash or nothing call* opce, která nevyplácí nic, pokud je cena akcie uzavřena pod realizační cenou a vyplácí fixní částku  $Q$ , když je cena uzavřena nad realizační cenou. Pravděpodobnost (v rizikově neutrálním světě), že cena akcie v době splatnosti opce bude větší než realizační cena je  $N(d_2)$ . Hodnota *cash or nothing call* je pak

$$Qe^{-r(T-t)}N(d_2). \quad (5.15)$$

Jiným typem *binary option* je *asset or nothing call*. Tato opce nevyplácí nic, jestliže je cena podkladové akcie uzavřena pod realizační cenou a vyplácí částku rovnou samotné ceně akcie, pokud je cena bazické akcie uzavřena nad uplatňovací cenou. Hodnota *asset or nothing call* je rovna

$$SN(d_1). \quad (5.16)$$

Obyčejná opce je ekvivalentní dlouhé pozici v *asset or nothing call* a krátké pozici v *cash or nothing call*, kde se hotovostní výplata rovná realizační ceně.

## 5.8 Lookback Options [Goldman (1989)]

Výplata z *lookback option* závisí na maximální nebo minimální ceně, jež bylo dosaženo během životnosti opce. Jestliže  $S_1$ ,  $S_2$  a  $S_T$  označují po řadě minimální, maximální a finální dosaženou cenu, pak výplata z *lookback call* je  $\max(0, S_T - S_1)$  nebo jednoduše  $S_T - S_1$  a výplata z *lookback put*  $\max(0, S_2 - S_T)$  či  $S_2 - S_T$ .

Oceňovací vzorec byl navržen pro *European lookbacks*. Hodnota *European lookback call* v čase nula je

$$Se^{-\delta T} N(a_1) - Se^{-\delta T} \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} N(-a_1) - S_{\min} e^{-rT} \left[ N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} e^{Y_1} N(-a_3) \right], \quad (5.17)$$

kde  $S_{\min}$  je minimální dosažená hodnota k danému datu a

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\ln(S/S_{\min}) + (r - \delta + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ a_2 &= a_1 - \sigma\sqrt{T}, \\ a_3 &= \frac{\ln(S/S_{\min}) + (-r + \delta + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ Y_1 &= -\frac{2(r - \delta - \sigma^2/2)\ln(S/S_{\min})}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Hodnota *European lookback put* je

$$S_{\max} e^{-rT} \left[ N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} e^{Y_2} N(-b_3) \right] + Se^{-\delta T} \frac{\sigma^2}{2(r-\delta)} N(-b_2) - Se^{-\delta T} N(b_2), \quad (5.18)$$

kde  $S_{\max}$  je maximální dosažená cena k danému datu a

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\ln(S_{\max}/S) + (-r + \delta + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ b_2 &= b_1 - \sigma\sqrt{T}, \\ b_3 &= \frac{\ln(S_{\max}/S) + (r - \delta - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ Y_2 &= \frac{2(r - \delta - \sigma^2/2)\ln(S_{\max}/S)}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

*Call lookback* je v podstatě způsob, kterým může držitel (*holder*) zakoupit podkladové aktivum za nejnižší dosaženou cenu během životnosti opce. Podobně *put lookback* je způsob, jakým může *holder* prodat bazické aktivum za nejvyšší dosaženou cenu během životnosti opce. Podléhajícím aktivem bývá nejčastěji komodita. Analogicky k *barrier options* je otázkou jak často pozorovat cenu aktiva. V analytickém vyjádření se opět předpokládá kontinuální pozorování.

## 5.9 Asian Options [Kemma & Vorst (1990)]

*Asian options* jsou opce, u kterých výplata závisí na průměrné ceně podkladového aktiva během stanoveného období životnosti opce. Výplata z *average price call* je  $\max(0, S_{ave} - X)$  a z *average price put*  $\max(0, X - S_{ave})$ , kde  $S_{ave}$  je průměrná hodnota bazického instrumentu počítaná za nějakou předem stanovenou dobu. *Average price option* jsou méně nákladné ve srovnání s obyčejnými opcemi a v řadě případů i vhodnější pro uspokojení specifických potřeb podnikových ekonomů. Jiným typem je *average strike option*. *Average strike put* vyplácí  $\max(0, S - S_{ave})$  zatímco *average strike call*  $\max(0, S_{ave} - S)$ . *Average price options* může zaručit, že průměrná cena placená (resp. přijatá) za aktivum, které se často obchoduje v určité době je nižší (resp. vyšší) než finální cena.

Pokud předpokládáme, že cena  $S$  bazického instrumentu je logaritmicko-normálně rozdělená a  $S_{ave}$  je geometrický průměr jednotlivých  $S$ , máme k dispozici analytický vzorec pro ohodnocení *European average price option*. To proto, že geometrický průměr řady logaritmicko-normálně rozdělených náhodných proměnných má také logaritmicko-normální rozdělení. V rizikově neutrálním světě lze ukázat, že pravděpodobnostní rozdělení geometrického průměru přes určité období je stejné jako rozdělení akcie na konci období, kdy je očekávané tempo růstu akcie  $(r - \delta - \sigma^2/6)/2$  a její volatilita  $\sigma/\sqrt{3}$ . *Geometric average price option* může být považována za obyčejnou opci s volatilitou  $\sigma/\sqrt{3}$  a dividendovým výnosem  $r - 1/2(r - \delta - \sigma^2/6) = 1/2(r + \delta + \sigma^2/6)$ .

Pokud je *Asian options* definována pomocí aritmetického průměru (a je to poměrně časté), nemáme k dispozici analytické vyjádření hodnoty opce. To proto, že rozdělení aritmetického průměru řady logaritmicko-normálních rozdělení nemá vhodné analytické vlastnosti. Nicméně existuje analytická aproximace pro ohodnocení opcí postavených na aritmetickém průměru. Tato aproximace vyžaduje přesný výpočet prvních dvou momentů

pravděpodobnostního rozdělení a po té předpokládat, že rozdělení aritmetického průměru je logaritmicke normální s těmito dvěma momenty.

Definujme

$$M_1 = \frac{e^{(r-\delta)T} - 1}{(r-\delta)T}$$

a

$$M_2 = \frac{2e^{[2(r-\delta)+\sigma^2]T}}{(r-\delta+\sigma^2)(2r-2\delta+\sigma^2)T^2} + \frac{2}{(r-\delta)T^2} \left[ \frac{1}{2(r-\delta)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-\delta)T}}{r-\delta+\sigma^2} \right].$$

První a druhý moment aritmetického průměru jsou  $SM_1$  a  $S^2M_2$ . Z rovnic  $E(S_T) = Se^{\mu(T-t)}$  a  $\text{var}(S_T) = S^2 e^{2\mu(T-t)} (e^{\sigma^2(T-t)} - 1)$  vyplývá, že při logaritmicke-normální aproximaci můžeme pohlížet na *average price option* jako na obyčejnou opci s dividendovým výnosem  $\delta_A$  a volatilitou  $\sigma_A$ , kde  $e^{(r-\delta_A)T} = M_1$ ;  $e^{[2(r-\delta_A)+\sigma_A^2]T} = M_2$ .

Tyto rovnice vyřešíme pro  $\delta_A$  a  $\sigma_A^2$

$$\delta_A = r - \frac{\ln M_1}{T}; \quad \sigma_A^2 = \frac{\ln M_2}{T} - 2(r - \delta_A).$$

## 5.10 Options to Exchange One Asset for Another [Margrabe (1978)]

*Options to exchange one asset for another* mohou vznikat v různých situacích. Opce na nákup britských liber za švýcarské franky je z hlediska amerického investora opce na směnu jedné zahraniční měny za druhou. *Stock tender offer* je opce na směnu jednoho balíku akcií za druhý. Vzorec pro ohodnocení evropské opce na vzdání se aktiva v hodnotě  $S_1$  proti získání aktiva v hodnotě  $S_2$  poprvé navrhnul Margrabe. Pokud se  $S_1$  a  $S_2$  chovají podle geometrického Brownova pohybu s volatilitami  $\sigma_1$  a  $\sigma_2$ , okamžitá korelace mezi  $S_1$  a  $S_2$  je  $\rho$  a výnosy z  $S_1$  a  $S_2$  jsou  $\delta_1$  a  $\delta_2$ , hodnotu opce můžeme spočítat následovně

$$S_2 e^{-\delta_2(T-t)} N(d_1) - S_1 e^{-\delta_1(T-t)} N(d_2), \quad (5.19)$$

kde

$$d_1 = \frac{\log(S_2/S_1) + (\delta_1 - \delta_2 + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

a

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Povšimněme si, že tyto vzorce jsou nezávislé na bezrizikové úrokové sazbě  $r$ . To proto, že když roste  $r$ , zvyšuje se tempo růstu cen obou aktiv (v rizikově neutrálním světě), ale to je vyváženo růstem diskontní míry. Proměnná  $\sigma$  je volatilita podílu  $S_2/S_1$ . Srovnání s odstavcem 2.4 ukazuje, že cena opce je totožná s cenou  $S_1$  kusů evropských call opcí na aktivum v hodnotě  $S_2/S_1$  s uplatňovací cenou 1, bezrizikovou úrokovou mírou  $\delta_1$  a dividendovým výnosem  $\delta_2$ . Mark Rubinstein [Rubinstein (1991)], ukázal že americká verze této opce může být pro účely ocenění charakterizována obdobně. Avšak vlastní ohodnocení provedeme užitím binomického modelu.

## Závěr

Touha obchodníků a investorů pokrýt rizika z nepříznivých cenových pohybů investice je stará jako lidstvo samo. Riziko nezdaru je spojeno prakticky s každou lidskou činností a tedy i s investicemi. Na tomto faktu nic nezmění momentální nálady ve společnosti, institucionální uspořádání, ba ani moderní technologie. Protože jsou a budou existovat rizika, budou existovat i finanční deriváty: šikovné nástroje nikoliv na odstranění všech rizik (což není možné), ale na jejich rozdělení, částečné přesunutí na někoho jiného za poplatek, umožňující právě takový mix očekávaných rizik a očekávaných výnosů, jaký je investor schopen a ochoten unést.

Finanční opce, ač existují asi čtvrtstoletí, zažívají svůj rozkvět teprve v posledních deseti letech. Statisticy hlásí každým rokem narůstající objemy obchodů s těmito nástroji. V zásadě se na nich účastní dva typy subjektů: ty, které chtějí riziko svých investic zmírnit a jsou ochotny za to zaplatit, a na druhé straně ty, které jsou ochotny za poplatek na sebe část cizího investičního rizika převzít. Vzhledem k existenci sekundárních trhů se pak ti, kteří riziko na sebe převzali, mohou přes nákupy a prodeje derivátů střídat s výdělků i prodělků podle momentálních cenových výkyvů těchto instrumentů. Přestože zisky a ztráty jednotlivých účastníků dávají celkem nulovou výslednou hodnotu, může mít používání těchto nástrojů agregovaný ekonomický dopad.

Všeobecný mnohaletý trend ukazuje, že nárůst objemu derivátů a obchodů s nimi pravidelně předstihuje nárůst základních investičních instrumentů a obchodů. Tedy, to co zajišťuje a přemísťuje rizika, roste rychleji než to, čeho rizika jsou zajišťována: deriváty na akcie rostou rychleji než akcie, deriváty na úvěrové instrumenty a úroky rostou rychleji než úvěry, deriváty na komodity rychleji než objemy obchodů komoditami. Více rizik (zejména po útocích Al-Káidy na USA), více obav z případných ztrát a větší potřeba rizika diverzifikovat a mírnit vedly k boomu na trhu derivátů.

Nejvíce se obchoduje s kontrakty na devizy, akciové indexy a dluhopisy. Ale i kontrakty s ropou a ropnými produkty, zemědělskými plodinami, drahými kovy a masem jsou velice likvidní. Jenom v devizách různých měn proti USD se obchoduje průměrně 3,5 mld. USD denně. Při těchto obchodech působí obrovský pákový efekt, takže není ničím mimořádným, když někdo vydělá 100 % ne za rok, ale už během několika hodin. Tento pákový efekt je důsledkem toho, že na zboží, které se dodává s pozdějším termínem plnění, je placena záloha pouze ve výši 5 – 10 % hodnoty tohoto zboží, přičemž jeho objem je pevně stanoven a definován co do množství a ceny. Z toho plyne, že pákový efekt je deseti- až



dvacetinásobný, zatímco u akcií je maximálně – v případě, že broker klientovi úvěruje stejnou částku hotovosti – pouze dvounásobný. Množství zboží na jeden kontrakt je u každé komodity pevně stanoveno. Zisky či ztráty plynou ovšem z celého objemu kontraktu, přestože se platí pouze malá záloha. Podstatná část těchto obchodů je čistě spekulativní, bez jakéhokoliv zájmu zboží dostat nebo prodat. Podstata spočívá v tom, že ještě před dodáním zboží s ním lze dále obchodovat, aniž by ho aktér trhu fyzicky měl „u sebe“. I akciový index je zde zbožím neboli komoditou. Dealeři poslední dobou preferují tzv. krátké prodeje (short selling), neboť zkušenost ukazuje, že přehřátá cena jde dolů většinou mnohem rychleji, než šla nahoru. Nejlepším příkladem mohou být mnohé akcie, které zaznamenaly léta vzrůstu, aby potom během velmi krátké doby (často pouze během několika dní nebo dokonce hodin) ztratily 90 % své hodnoty. Stejně a snad i více než v případě akcií sledují ceny některých derivátů jasný cenový trend nahoru nebo dolů. Projevuje se tam tzv. efekt „splašeného stáda dobytka“, které někdy letí a nelze jej zastavit. „The trend is my friend“, říkají Američané. V USA také obchody s deriváty vznikly a mají dlouhou tradici, čehož důkazem jsou derivátové burzy, jakými jsou třeba Chicago Board of Trade (CBOT), Chicago Mercantile Exchange (CME) nebo New York Mercantile Exchange (NYMEX).

Opce potřebují pohyb trhu, volatilitu – čím větší, tím lépe. Velmi zajímavé jsou z tohoto hlediska spekulativní bubliny, které se dlouho nafukují a potom rychle splasknou. Obchod s deriváty má proti obchodům s bazickými instrumenty např. akciemi další značnou výhodu. Zatímco na akciových trzích vydělává při poklesu burzy málokdo, protože pro spekulace na pád ceny akcií, tzv. „krátké prodeje“, existují různá technická či administrativní omezení, jsou tyto obchody v derivátech naprosto rovnocenné spekulacím na růst ceny. Jinak řečeno v obchodech s deriváty je úplně jedno, zda cena roste nebo klesá, stačí pouze určit směr. Přitom podle zkušeností je mnohem snazší určit, že nějaká komodita je levná a cena půjde nahoru, než že nějaká akcie je levná. Navíc informace o komoditách nejsou zmanipulované tak jako informace o akciích. Příklady dezinformací z akciových trhů poslední doby jsou mnohdy šokující. Akcioví analytici sice utěšují své klienty, že „dlouhodobě trh půjde nahoru“, ale jak říkával s nadsázkou Keynes: „V dlouhodobé perspektivě budeme všichni mrtví.“ V obchodech s deriváty se většinou obchoduje krátkodobě s výhledem několika minut, hodin, dní, týdnů, vzácně měsíců, nikoliv roků, jako je tomu obvykle u akcií.

Existuje úžasná technická podpora skvělých, interaktivních obchodních systémů. Během vteřiny po pouhém stisknutí tlačítka myši lze koupit či prodat v Chicagu opci s okamžitým znázorněním realizované ceny a časem obchodu s přesností na vteřiny. Uživatelé opcí musí zohlednit i náklady zajištění. Pro malý podnik mohou být náklady na zajištění vážnou

překážkou, neboť takový podnik zřejmě nemá oddělení *treasury* se schopností vyrovnávat pohledávky a závazky v různých měnách a zajišťovat reziduální pozici. I když dealeři tvrdí, že zajištění je efektivní od 1 mil. USD, připouští, že v praxi obchody začínají při 5 mil. USD.

Přestože je má práce zaměřena zejména na teoretickou oblast, neboť oslovené banky nebyly ochotny spolupracovat z důvodu ochrany bankovního tajemství na konkrétních projektech svých klientů, dovoluji mi vznést i určité námitky k současnému stavu v úpravě obchodování s opcemi (či deriváty obecně) a navrhnout určité dílčí změny.

Ačkoliv deriváty slouží k zajištění proti rizikům, samotné používání derivátů je také spojeno s riziky. Největší pozornost je věnována úvěrovému riziku. Zde tkví hlavní nebezpečí. Pokud jde o banky, deriváty jsou zahrnuty v požadavcích na rizikově vážený kapitál, v požadavcích na devizové pozice apod. Bankovní dohled v každé zemi tak svými opatřeními a dohlídkami do určité míry omezuje riziko bank. Poněkud jiná situace je v ostatních finančních institucích, které buď žádnému dohledu nepodléhají, nebo je takový dohled slabý. Těchto institucí se zpravidla netýkají předpisy o obchodech s deriváty platné pro banky. Podle mého názoru je tím do určité míry narušena rovnovážná konkurence bank a nebankovních finančních institucí. Myslím, že by bylo žádoucí, pokud by pro všechny obchodníky s deriváty platila stejná pravidla obchodování.

V existujících údajích o trzích s deriváty, ať už jsou shromažďovány centrálními bankami nebo asociacemi, sledávám několik vážných nedostatků. Za prvé rozdíly mezi různými vykazujícími systémy ve smyslu rozsahu nástrojů a institucí brání konzistentní agregaci vykazovaných údajů. Výsledkem je, že z existujících údajů není možné odvodit shrnující data o velikosti globálního trhu s deriváty, které by pokrývaly banky i obchodníky s cennými papíry. Za druhé zjišťované údaje se primárně zaměřují na podléhající hodnoty existujících kontraktů. Neříkají tudíž mnoho o velikosti a distribuci rizik, která jsou s trhy s deriváty spojena. Za třetí poskytují pouze omezené informace o struktuře účastníků trhu s deriváty. Konečně z údajů nelze stanovit likviditu na trzích s deriváty nebo ohrožení tržní dynamiky způsobené obchodováním s deriváty.

Současný nedostatek transparentnosti vede k doporučení pro centrální banky, aby rozšířily sběr údajů o derivátech. Mezinárodně koordinovaný přístup k sběru těchto údajů by se měl zaměřit zejména na velikost a strukturu globálních derivátových trhů OTC. Přímé zapojení centrálních bank do sběru a kompilace údajů by podle mého názoru zvýšilo spolehlivost a mezinárodní konzistenci statistik a zajistilo by centrálním bankám přístup k údajům pro další analýzy.

V předchozích kapitolách jsem se věnoval převážně oceňování opcí, což představuje vcelku nelehký úkol, při jehož řešení se nelze vyhnout často i poměrně složitým matematickým modelům. Záměr některých modelů nebývá vždy poctivý, neboť v některých případech se jejich autoři snaží přelstít účastníky trhu. To se ostatně ukázalo i v našem příkladu v apendixu (ad A), kdy náš takřka učebnicový příklad s akciemi KB není v praxi použitelný. V modelu totiž vycházíme z historické volatility, což není v reálu možné, neboť pokud by historická volatilita byla dobrým estimátorem skutečné volatility, zřejmě bychom pomocí analýzy časových řad mohli odhadovat přímo akciové kursy (resp. jejich střední hodnoty) a obchodování s opcemi by značně ztrácelo na významu. V praxi se používá implikovaná volatilita, která může dosáhnout i dvojnásobných hodnot ve srovnání s historickou volatilitou. Implikovaná volatilita je kotována zpravidla bankami. V současné době je však dostupná pouze volatilita na běžně obchodovanou měnu (např. EUR, USD, GBP apod. pro různé splatnosti např. 3M, 6M, 9M...). Výpočet reálné opční prémie (call i put) na měnový pár EUR/CZK byl demonstrován v apendixu (ad B). V apendixu (ad C) byl testován jev spojený s implikovanou volatilitou, v odborné praxi i literatuře nazývaný jako *volatility smile / skew*, neboť jak již bylo uvedeno v odstavci 2.7.3 volatilita není v žádném případě konstantní, nýbrž její hodnota se mění s realizační cenou (*ceteris paribus*) a při grafickém zachycení vytváří grafické formace připomínající „úsměv (*smile*)“ anebo „úšklebek (*skew*)“. Test byl proveden na příkladu skutečně kotovaných měnových call opcí amerického typu na měnový pár EUR/USD Chicagskou Mercantile Exchange (ticker ECH4C). Potřebná data byla získána prostřednictvím interaktivního informačního a obchodního systému Bloomberg v dealingovém sále ČNB.

Otázkou zůstává, jaká bude budoucnost derivátů. Vždy se vnucuje odpověď, že všechny podstatné objevy již byly učiněny. Každým rokem se však úroveň znalostí posouvá dále. Finanční konstruktéři a matematici nalézají stále nové nástroje a jejich kombinace. Finanční trhy v USA i v jiných vyspělých ekonomikách jsou doslova takovými nástroji zaplaveny.

Myslím, že i s ohledem na rychle se měnící rizika bude velmi zajímavé sledovat budoucí vývoj v této oblasti nejen u nás, ale i ve světě. Pro Českou republiku pak může být určitým zlomovým bodem odstranění některých bariér obchodu v souvislosti s naším vstupem do EU, které se bezpochyby dotkne také obchodování s finančními deriváty. Věřím, že i má práce může případnému čtenáři přispět k lepší orientaci v této problematice.

## Apendix

### (A) Výpočet teoretické prémie call a put opcí na akcie KB

Pro výpočet teoretické opční prémie jsou nezbytné parametry charakterizované v odstavci 2.4:  $S_t$  (promptní cena bazické akcie),  $X$  (realizační cena),  $T - t$  (doba do splatnosti opce),  $\sigma$  (volatilita ceny akcie) a  $r$  (bezriziková úroková míra). Předpokládejme, že datum splatnosti opce je 23.4. 2004.

K datu výpočtu (22. 1. 2004) byly hodnoty uvedených parametrů následující:

$$S_t = 2589 \text{ Kč};$$

$$X = 2590 \text{ Kč};$$

Za bezrizikovou úrokovou sazbu lze považovat střed mezi 3M PRIBID (1,96 %) a 3M PRIBOR (2,06 %), tedy 3M MID = 2,01 %, tuto sazbu musíme ještě upravit pro úročení ve spojitém čase, čili  $r = \ln(1 + 0,0201) = 0,0199$  ;

dobu do splatnosti lze vypočíst za předpokladu evropského standardu 30E/360 takto:

$$\begin{aligned} T - t &= \frac{360(R_2 - R_1) + 30(M_2 - M_1) + (D_2 - D_1)}{360} \\ &= \frac{360(2004 - 2004) + 30(4 - 1) + (23 - 22)}{360} = 0,2527; \end{aligned}$$

výpočet či přesněji odhad volatility je již poměrně komplikovanější a vyžaduje znalost akciových kursů za delší časové období (viz údaje v níže uvedené tabulce). Lze ho rozfázovat do následujících kroků:

(1) Vypočteme  $\ln\left(\frac{S_\tau}{S_{\tau-1}}\right)$ .

(2) Pro jednoduchost přeznačíme  $\ln\left(\frac{S_\tau}{S_{\tau-1}}\right)$  jako  $u_\tau$ , a provedeme klasický odhad směrodatné

odchylky hodnot  $u_\tau$  pomocí  $s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{\tau=1}^N (u_\tau - \bar{u})^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{\tau=1}^N u_\tau^2 - \frac{1}{N(N-1)} \left(\sum_{\tau=1}^N u_\tau\right)^2}$ .

Tedy v našem případě dostáváme, že  $s = 0,0210$ .

(3) Odhadneme volatilitu  $\hat{\sigma}$  pomocí  $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}$ . Za předpokladu 250 obchodních dní v roce

dostáváme, že  $\hat{\sigma} = \frac{0,0210}{\sqrt{1/250}} = 0,3328$ .

Nyní již můžeme dosazovat do Blackova-Scholesova vzorce:

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} = 0,1114;$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t} = -0,0559;$$

$$N(d_1) = 0,5114;$$

$$N(d_2) = 0,4777;$$

$$C_t = S_t \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) = 178,30 \text{ Kč}$$

$$P_t = X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot [1 - N(d_2)] - S_t \cdot [1 - N(d_1)] = 166,30 \text{ Kč}.$$

$$\text{delta}_t^C = 0,5444$$

$$\text{gamma}_t^C = 0,0009$$

$$1 - \text{day Theta} = -1,0024$$

$$\text{vega}_t^C = 5,1523$$

$$\text{rho}_t^C = 3,1038$$

$$\text{delta}_t^P = -0,4556$$

$$\text{gamma}_t^P = 0,0009$$

$$1 - \text{day Theta} = -0,8602$$

$$\text{vega}_t^P = 5,1523$$

$$\text{rho} = -3,1914$$

Datum	Kurz BCP [Kč]	Změna BCP [%]	Objem [ks]	$\ln(S_t/S_{t-1})$
22.1.2004	2 589	2.05%	106 516	0,0203
21.1.2004	2 537	-1.01%	76 889	-0,0102
20.1.2004	2 563	-0.70%	113 047	-0,0070
19.1.2004	2 581	1.30%	150 581	0,0129
16.1.2004	2 548	0.87%	164 745	0,0087
15.1.2004	2 526	0.40%	160 974	0,0040
14.1.2004	2 516	0.84%	190 721	0,0084
13.1.2004	2 495	3.14%	197 835	0,0309
12.1.2004	2 419	-0.90%	161 179	-0,0091
9.1.2004	2 441	-1.45%	240 950	-0,0025
8.1.2004	2 447	-1.43%	217 188	-0,0266
7.1.2004	2 513	0.88%	165 332	0,0088
6.1.2004	2 491	2.09%	173 900	0,0207
5.1.2004	2 440	0.91%	78 006	0,0091
30.12.2003	2 418	0.17%	89 862	0,0017
29.12.2003	2 414	1.17%	138 496	0,0117
23.12.2003	2 386	0.68%	75 979	0,0067
22.12.2003	2 370	0.85%	101 494	0,0085
19.12.2003	2 350	-1.43%	311 793	-0,0144
18.12.2003	2 384	2.32%	207 038	0,0229
17.12.2003	2 330	-1.60%	183 753	-0,0162
16.12.2003	2 368	-0.71%	136 183	-0,0025
15.12.2003	2 374	0.46%	108 601	0,0000
12.12.2003	2 374	1.41%	150 020	0,0140
11.12.2003	2 341	0.77%	97 457	0,0077
10.12.2003	2 323	-0.13%	159 144	-0,0013
9.12.2003	2 326	2.20%	179 679	0,0217
8.12.2003	2 276	2.29%	168 798	0,0227
5.12.2003	2 225	-1.37%	254 437	-0,0138
4.12.2003	2 256	-2.30%	304 952	-0,0136
3.12.2003	2 287	0.96%	142 123	0,0000
2.12.2003	2 287	-2.26%	154 580	-0,0229
1.12.2003	2 340	2.14%	84 259	0,0212
28.11.2003	2 291	-1.25%	122 402	-0,0126
27.11.2003	2 320	-1.40%	137 595	-0,0141
26.11.2003	2 353	1.60%	178 558	0,0158
25.11.2003	2 316	0.83%	147 041	0,0082
24.11.2003	2 297	0.57%	183 904	0,0057
21.11.2003	2 284	1.06%	146 003	0,0106
20.11.2003	2 260	-3.42%	189 397	-0,0348
19.11.2003	2 340	-1.56%	126 913	-0,0157
18.11.2003	2 377	-0.92%	187 999	-0,0092
14.11.2003	2 399	1.52%	413 419	0,0151
13.11.2003	2 363	0.68%	204 817	0,0068
12.11.2003	2 347	1.08%	265 514	0,0107
11.11.2003	2 322	-3.97%	347 523	-0,0405
10.11.2003	2 418	-1.19%	86 060	-0,0119
7.11.2003	2 447	0.20%	136 458	0,0020
6.11.2003	2 442	0.12%	153 521	0,0012
5.11.2003	2 439	-0.65%	147 146	-0,0065
4.11.2003	2 455	-1.60%	164 636	-0,0162

Datum	Kurz BCP [Kč]	Změna BCP [%]	Objem [ks]	$\ln(S_t/S_{t-1})$
3.11.2003	2495	1.38%	183 803	0,0137
31.10.2003	2461	3.53%	230 044	0,0347
30.10.2003	2377	1.02%	236 882	0,0101
29.10.2003	2353	-1.88%	238 773	-0,0189
27.10.2003	2398	-3.27%	109 199	-0,0332
24.10.2003	2479	1.10%	123 020	0,0110
23.10.2003	2452	-1.13%	215 549	-0,0114
22.10.2003	2480	-4.21%	178 883	-0,0430
21.10.2003	2589	0.54%	68 333	0,0054
20.10.2003	2575	-0.08%	70 553	-0,0008
17.10.2003	2577	0.82%	126 070	0,0082
16.10.2003	2556	1.15%	175 948	0,0114
15.10.2003	2527	1.69%	186 606	0,0168
14.10.2003	2485	0.00%	150 017	0,0000
13.10.2003	2485	1.64%	136 418	0,0162
10.10.2003	2445	1.24%	190 757	0,0123
9.10.2003	2415	3.43%	500 754	0,0337
8.10.2003	2335	-1.93%	434 432	-0,0195
7.10.2003	2381	1.54%	200 202	0,0152
6.10.2003	2345	-3.97%	324 588	-0,0405
3.10.2003	2442	-2.24%	208 028	-0,0227
2.10.2003	2498	1.92%	184 919	0,0190
1.10.2003	2451	4.12%	182 562	0,0404
30.9.2003	2354	-2.53%	176 005	-0,0256
29.9.2003	2415	0.33%	28 598	0,0033
26.9.2003	2407	-0.37%	148 082	-0,0037
25.9.2003	2416	-2.74%	141 989	-0,0278
24.9.2003	2484	-1.15%	53 618	-0,0116
23.9.2003	2513	2.70%	109 033	0,0266
22.9.2003	2447	-1.53%	186 046	-0,0154
19.9.2003	2485	-3.27%	270 207	-0,0332
18.9.2003	2569	-3.24%	412 174	-0,0329
17.9.2003	2655	3.31%	269 267	0,0325
16.9.2003	2570	4.18%	201 298	0,0409
15.9.2003	2467	-0.32%	163 268	-0,0032
12.9.2003	2475	-2.25%	236 956	-0,0228
11.9.2003	2532	2.30%	259 912	0,0228
10.9.2003	2475	0.53%	448 983	0,0053
9.9.2003	2462	-5.60%	281 731	-0,0576
8.9.2003	2608	-0.11%	199 551	-0,0011
5.9.2003	2611	-0.38%	221 213	-0,0038
4.9.2003	2621	-0.57%	422 473	-0,0057
3.9.2003	2636	2.21%	603 899	0,0219
2.9.2003	2579	5.96%	395 958	0,0579
1.9.2003	2434	2.44%	247 638	0,0241
29.8.2003	2376	0.47%	198 375	0,0055
28.8.2003	2363	1.50%	228 824	0,0141
27.8.2003	2330	2.96%	277 028	0,0292
26.8.2003	2263	-1.01%	206 130	x

Tab. A.1 Historické kursy akcie KB

## (B) Výpočet opční prémie call a put opcí na EUR/CZK

Pro výpočet opční prémie měnových opcí jsou nezbytné parametry charakterizované v odstavci 2.5:  $S_t$  (spotový měnový kurs EUR/CZK),  $X$  (realizační cena),  $T - t$  (doba do splatnosti opce),  $\sigma$  (implikovaná volatilita),  $r$  (bezriziková úroková míra na prodávanou měnu) a  $r_f$  (bezriziková úroková míra na kupovanou měnu). Předpokládejme, že datum splatnosti opce je 30. 7. 2004.

K datu výpočtu (30. 1. 2004) byly hodnoty uvedených parametrů následující:

	CZK/EUR <sup>6</sup>		
	BID	MID	ASK
	33,273	33,283	33,293

$$S_t = 33,283;$$

$$X = 33,000;$$

6M PRIBID	6M MID	6M PRIBOR
2,03 %	2,08 %	2,13 %

Sazbu 6M MID lze považovat za bezrizikovou úrokovou sazbu, avšak je nezbytné ji upravit pro úročení ve spojitém čase, tedy  $r = \ln(1 + 0,0208) = 0,0206$ .

Úrokovou sazbu na zahraniční měnu lze stanovit obdobně, s tím rozdílem, že není kotována sazba EURIBID, tudíž sazbu střed vyjádříme aproximativně tak, že od sazby EURIBOR odečteme 5 bp, tedy 6M EURIBOR je 2,073 %, po odečtení 0,05 dostáváme 2,023 %. Avšak i tuto sazbu musíme upravit pro úročení ve spojitém čase, čili  $r_f = \ln(1 + 0,02023) = 0,0200$ .

$$T - t = 0,5;$$

6M implied volatility EUR/CZK		
BID	MID	ASK
6,3 %	6,8 %	7,3 %

$$\sigma = 6,8 \%$$

Protože známe všechny údaje, můžeme dosazovat do Garmanova-Kohlhagenova vzorce pro opční prémii měnových opcí.

---

<sup>6</sup> FOREX 2004-01-30



$$d_1 = \frac{\ln(S_t / X) + (r - r_f + \sigma^2 / 2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} = 0,2079;$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t} = 0,1598;$$

$$N(d_1) = 0,5823;$$

$$N(d_2) = 0,5635;$$

$$C_t = S_t \cdot e^{-r_f(T-t)} \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2) = 0,785 \text{ Kč}$$

$$P_t = X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot [1 - N(d_2)] - S_t \cdot e^{-r_f(T-t)} \cdot [1 - N(d_1)] = 0,495 \text{ Kč}.$$

### (C) Testování volatility smile / skew měnových opcí

Pro testování jevu označovaného mezi dealery jako *volatility smile* resp. *volatility skew*, stačí (jak již bylo uvedeno v odstavci 2.7.3) vynést do grafu hodnoty implikovaných volatilit pro jednotlivé *strike prices*. Postup je tedy poměrně jednoduchý, určité potíže mohou nastat snad jen při získávání dat. Jelikož se v České republice obchodují pouze měnové opce (OTC), testování bylo provedeno na příkladu call opce na nejsledovanější měnový pár EUR/USD. Data byla čerpána z informačního a obchodního systému Bloomberg. Z níže vložených bloombergových *screenů* lze vyčíst podrobnou specifikaci daného opčního kontraktu (Option Ticker Description). Pro náš test jsou z každého *screenu* důležité pouze dvě čísla, a to *strike price* v poli *Sample Option* a *implied volatility* v poli *Volatility Analysis*. Např. na prvním *screenu* je *strike price* 1.2300 a *implied volatility* 25.66 %. Na každém dalším *screenu* je *strike price* větší o 50 pips, a tomu odpovídá pokles implikované volatility řádově 2 – 3 %.

Option Ticker Description										P209	Currency DES	
Sample Option										Underlying Security		Strikes
Ticker	ECH4C	1.2300	Ticker	ECH4C	<CRNCY>	1.2300						
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4		1.2350						
Price	.0447		Price	1.2666		1.2400						
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000		1.2450						
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00		1.2500						
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2550						
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004	1.2600						
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2650						
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available			1.2700						
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	---	Dec	+ serial	
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange										Volatility Analysis		
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00									
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00									
	Option		Future									
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000					30 Day HVT	10.08			
Tick Size	.0001		.0001					60 Day HVT	10.23			
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000					90 Day HVT	10.45			
								Implied	25.66			
								Delta	0.52258			
								Gama	3.60835			
Related Functions												
1) OMON Option Bid/Ask Monitor						2) HIVG Impl. Vol. Grap						
3) GPO Daily Bar Chart						4) OV Option Valuation						
5) GIP Intraday Price Chart												
Australia 61 2 9777 8600			Brazil 5511 3048 4500			Europe 44 20 7330 7500			Germany 49 69 920410			
Hong Kong 852 2977 6000			Japan 81 3 3201 8900			Singapore 65 6212 1000			U.S. 1 212 318 2000			
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:44:24												

Curncy						P209		Curncy DES	
<b>Option Ticker Description</b>									
Sample Option					Underlying Security				
Ticker	ECH4C		1.2350	Ticker	ECH4C	<CRNCY>		1.2300	Strikes
Name	Call on ECH4			Name	Call on ECH4			1.2350	
Price	.0408			Price	1.2666			1.2400	
Contract on	1 ECH4C		Future	Contract Size	EUR 125,000			1.2450	
Market Value	\$ 5,587.50			Contract Value	\$ 158,325.00			1.2500	
First Trade	Mon	Mar	10, 2003	First Delivery	Wed	Mar	17, 2004	1.2550	
Last Trade	Fri	Mar	05, 2004	Last Trade	Mon	Mar	15, 2004	1.2600	
Expiration	Fri	Mar	05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar	17, 2004	1.2650	
Exercise Type	AMERICAN			Serial Options Available			1.2700		
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange					<b>Volatility Analysis</b>				
Chicago Option	07:20-14:00			07:20-14:00			Historical Volatility		
Chicago Future	17:00-16:00			07:20-14:00			30 Day HVT		
	Option			Future			10.08		
Value of 1 pt	\$ 125,000			\$ 125,000			60 Day HVT		
Tick Size	.0001			.0001			10.23		
Tick Value	\$ 12,5			\$ 125,000			90 Day HVT		
							10.45		
							Implied		
							23.38		
							Delta		
							0.52160		
							Gama		
							3.96101		
<b>Related Functions</b>									
1) OMON Option Bid/Ask Monitor					2) HIVG Impl. Vol. Grap				
3) GPO Daily Bar Chart					4) OV Option Valuation				
5) GIP Intraday Price Chart									
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410			
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000			
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:44:32									
Curncy						P209		Curncy DES	
<b>Option Ticker Description</b>									
Sample Option					Underlying Security				
Ticker	ECH4C		1.2400	Ticker	ECH4C	<CRNCY>		1.2300	Strikes
Name	Call on ECH4			Name	Call on ECH4			1.2350	
Price	.03701			Price	1.2666			1.2400	
Contract on	1 ECH4C		Future	Contract Size	EUR 125,000			1.2450	
Market Value	\$ 5,587.50			Contract Value	\$ 158,325.00			1.2500	
First Trade	Mon	Mar	10, 2003	First Delivery	Wed	Mar	17, 2004	1.2550	
Last Trade	Fri	Mar	05, 2004	Last Trade	Mon	Mar	15, 2004	1.2600	
Expiration	Fri	Mar	05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar	17, 2004	1.2650	
Exercise Type	AMERICAN			Serial Options Available			1.2700		
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange					<b>Volatility Analysis</b>				
Chicago Option	07:20-14:00			07:20-14:00			Historical Volatility		
Chicago Future	17:00-16:00			07:20-14:00			30 Day HVT		
	Option			Future			10.07		
Value of 1 pt	\$ 125,000			\$ 125,000			60 Day HVT		
Tick Size	.0001			.0001			10.22		
Tick Value	\$ 12,5			\$ 125,000			90 Day HVT		
							10.44		
							Implied		
							21.22		
							Delta		
							0.52079		
							Gama		
							4.36554		
<b>Related Functions</b>									
1) OMON Option Bid/Ask Monitor					2) HIVG Impl. Vol. Grap				
3) GPO Daily Bar Chart					4) OV Option Valuation				
5) GIP Intraday Price Chart									
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410			
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000			
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:44:38									

Curncy						P209		Curncy DES	
<b>Option Ticker Description</b>									
Page1/2									
Sample Option					Underlying Security				
Ticker	ECH4C	1.2450	Ticker	ECH4C	<CRNCY>	1.2300			
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4		1.2350			
Price	.0336		Price	1.2666		1.2400			
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000		1.2450			
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00		1.2500			
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2550			
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004	1.2600			
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2650			
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available			1.2700			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange						<b>Volatility Analysis</b>			
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00						
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00		Historical Volatility				
	Option		Future		30 Day HVT		10.07		
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000		60 Day HVT		10.22		
Tick Size	.0001		.0001		90 Day HVT		10.44		
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000		Implied		19.17		
						Delta		0.52015	
						Gama		4.83213	
Related Functions									
1) OMON Option Bid/Ask Monitor					2) HIVG Impl. Vol. Grap				
3) GPO Daily Bar Chart					4) OV Option Valuation				
5) GIP Intraday Price Chart									
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410			
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000			
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:44:56									
Curncy						P209		Curncy DES	
<b>Option Ticker Description</b>									
Page1/2									
Sample Option					Underlying Security				
Ticker	ECH4C	1.2500	Ticker	ECH4C	<CRNCY>	1.2350			
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4		1.2400			
Price	.0204		Price	1.2666		1.2450			
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000		1.2500			
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00		1.2550			
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2600			
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004	1.2650			
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2700			
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available			1.2750			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange						<b>Volatility Analysis</b>			
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00						
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00		Historical Volatility				
	Option		Future		30 Day HVT		10.07		
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000		60 Day HVT		10.22		
Tick Size	.0001		.0001		90 Day HVT		10.44		
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000		Implied		16.13		
						Delta		0.51956	
						Gama		5.74368	
Related Functions									
1) OMON Option Bid/Ask Monitor					2) HIVG Impl. Vol. Grap				
3) GPO Daily Bar Chart					4) OV Option Valuation				
5) GIP Intraday Price Chart									
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410			
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000			
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:45:02									

Curncy						P209		Curncy DES		
<b>Option Ticker Description</b>										
Sample Option								Underlying Security		Page1/2
Ticker	ECH4C	1.2550	Ticker	ECH4C	<CRNCY>			1.2400		
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4				1.2450		
Price	.0272		Price	1.2666				1.2500		
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000				1.2550		
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00				1.2600		
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2650		
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004			1.2700		
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2750		
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available				1.2800			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial	
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange								<b>Volatility Analysis</b>		
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00				Historical Volatility			
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00				30 Day HVT		10.06	
	Option		Future				60 Day HVT		10.22	
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000				90 Day HVT		10.44	
Tick Size	.0001		.0001				Implied		15.43	
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000				Delta		0.51950	
Related Functions								Gama		6.00500
1) OMON Option Bid/Ask Monitor				2) HIVG Impl. Vol. Grap						
3) GPO Daily Bar Chart				4) OV Option Valuation						
5) GIP Intraday Price Chart										
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410				
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000				
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:45:11										
Curncy						P209		Curncy DES		
<b>Option Ticker Description</b>										
Sample Option								Underlying Security		Page1/2
Ticker	ECH4C	1.2600	Ticker	ECH4C	<CRNCY>			1.2450		
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4				1.2500		
Price	.0243		Price	1.2666				1.2550		
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000				1.2600		
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00				1.2650		
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2700		
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004			1.2750		
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2800		
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available				1.2850			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial	
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange								<b>Volatility Analysis</b>		
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00				Historical Volatility			
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00				30 Day HVT		10.06	
	Option		Future				60 Day HVT		10.22	
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000				90 Day HVT		10.44	
Tick Size	.0001		.0001				Implied		13.73	
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000				Delta		0.51955	
Related Functions								Gama		6.74666
1) OMON Option Bid/Ask Monitor				2) HIVG Impl. Vol. Grap						
3) GPO Daily Bar Chart				4) OV Option Valuation						
5) GIP Intraday Price Chart										
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410				
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000				
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:45:20										

Curncy						P209		Curncy DES		
<b>Option Ticker Description</b>										
Sample Option								Underlying Security		Page1/2
Ticker	ECH4C	1.2650	Ticker	ECH4C	<CRNCY>			1.2500		
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4				1.2550		
Price	.0215		Price	1.2666				1.2600		
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000				1.2650		
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00				1.2700		
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2750		
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004			1.2800		
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2850		
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available				1.2900			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial	
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange								<b>Volatility Analysis</b>		
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00				Historical Volatility			
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00				30 Day HVT		10.07	
	Option		Future				60 Day HVT		10.22	
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000				90 Day HVT		10.44	
Tick Size	.0001		.0001				Implied		12.09	
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000				Delta		0.51990	
Related Functions								Gama		7.65984
1) OMON Option Bid/Ask Monitor				2) HIVG Impl. Vol. Grap						
3) GPO Daily Bar Chart				4) OV Option Valuation						
5) GIP Intraday Price Chart										
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410				
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000				
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:45:29										
Curncy						P209		Curncy DES		
<b>Option Ticker Description</b>										
Sample Option								Underlying Security		Page1/2
Ticker	ECH4C	1.2700	Ticker	ECH4C	<CRNCY>			1.2550		
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4				1.2600		
Price	.0178		Price	1.2666				1.2650		
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000				1.2700		
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00				1.2750		
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2800		
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004			1.2850		
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2900		
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available				1.2950			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial	
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange								<b>Volatility Analysis</b>		
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00				Historical Volatility			
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00				30 Day HVT		10.07	
	Option		Future				60 Day HVT		10.22	
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000				90 Day HVT		10.44	
Tick Size	.0001		.0001				Implied		9.93	
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000				Delta		0.52112	
Related Functions								Gama		9.32774
1) OMON Option Bid/Ask Monitor				2) HIVG Impl. Vol. Grap						
3) GPO Daily Bar Chart				4) OV Option Valuation						
5) GIP Intraday Price Chart										
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410				
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000				
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:45:39										

Curncy										P209		Curncy DES		
Option Ticker Description												Page1/2		
Sample Option						Underlying Security						Strikes		
Ticker	ECH4C				1.2750	Ticker	ECH4C		<CRNCY>			1.2550		
Name	Call on ECH4					Name	Call on ECH4					1.2600		
Price	.0162					Price	1.2663					1.2650		
Contract on	1 ECH4C				Future	Contract Size	EUR 125,000					1.2700		
Market Value	\$ 5,587.50					Contract Value	\$ 158,325.00					1.2750		
First Trade	Mon	Mar	10,	2003		First Delivery	Wed	Mar	17,	2004		1.2800		
Last Trade	Fri	Mar	05,	2004		Last Trade	Mon	Mar	15,	2004		1.2850		
Expiration	Fri	Mar	05,	2004		Last Delivery	Wed	Mar	17,	2004		1.2900		
Exercise Type	AMERICAN					Serial Options Available						1.2950		
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	---	Dec	+	serial		
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange										Volatility Analysis				
Chicago Option	07:20-14:00					07:20-14:00					Historical Volatility			
Chicago Future	17:00-16:00					07:20-14:00					30 Day HVT	10.07		
	Option					Future					60 Day HVT	10.23		
Value of 1 pt	\$ 125,000					\$ 125,000					90 Day HVT	10.44		
Tick Size	.0001					.0001					Implied	9.08		
Tick Value	\$ 12,5					\$ 125,000					Delta	0.51887		
Related Functions										Gama				*****
1) OMON Option Bid/Ask Monitor						2) HIVG Impl. Vol. Grap								
3) GPO Daily Bar Chart						4) OV Option Valuation								
5) GIP Intraday Price Chart														
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410								
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000								
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:46:36														
Curncy										P209		Curncy DES		
Option Ticker Description												Page1/2		
Sample Option						Underlying Security						Strikes		
Ticker	ECH4C				1.2800	Ticker	ECH4C		<CRNCY>			1.2550		
Name	Call on ECH4					Name	Call on ECH4					1.2600		
Price	.0135					Price	1.2663					1.2650		
Contract on	1 ECH4C				Future	Contract Size	EUR 125,000					1.2700		
Market Value	\$ 5,587.50					Contract Value	\$ 158,325.00					1.2750		
First Trade	Mon	Mar	10,	2003		First Delivery	Wed	Mar	17,	2004		1.2800		
Last Trade	Fri	Mar	05,	2004		Last Trade	Mon	Mar	15,	2004		1.2850		
Expiration	Fri	Mar	05,	2004		Last Delivery	Wed	Mar	17,	2004		1.2900		
Exercise Type	AMERICAN					Serial Options Available						1.2950		
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	---	Dec	+	serial		
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange										Volatility Analysis				
Chicago Option	07:20-14:00					07:20-14:00					Historical Volatility			
Chicago Future	17:00-16:00					07:20-14:00					30 Day HVT	10.08		
	Option					Future					60 Day HVT	10.23		
Value of 1 pt	\$ 125,000					\$ 125,000					90 Day HVT	10.45		
Tick Size	.0001					.0001					Implied	7.51		
Tick Value	\$ 12,5					\$ 125,000					Delta	0.52060		
Related Functions										Gama				*****
1) OMON Option Bid/Ask Monitor						2) HIVG Impl. Vol. Grap								
3) GPO Daily Bar Chart						4) OV Option Valuation								
5) GIP Intraday Price Chart														
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410								
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000								
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:46:46														

Curncy						P209		Curncy DES	
<b>Option Ticker Description</b>									
Page1/2									
Sample Option					Underlying Security				
Ticker	ECH4C	1.2850	Ticker	ECH4C	<CRNCY>	1.2550			
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4		1.2600			
Price	.0126		Price	1.2663		1.2650			
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000		1.2700			
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00		1.2750			
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2800			
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004	1.2850			
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2900			
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available			1.2950			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange						<b>Volatility Analysis</b>			
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00						
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00		Historical Volatility				
	Option		Future		30 Day HVT		10.07		
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000		60 Day HVT		10.22		
Tick Size	.0001		.0001		90 Day HVT		10.45		
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000		Implied		6.98		
						Delta		0.52146	
						Gama		*****	
Related Functions									
1) OMON Option Bid/Ask Monitor					2) HIVG Impl. Vol. Grap				
3) GPO Daily Bar Chart					4) OV Option Valuation				
5) GIP Intraday Price Chart									
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410			
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000			
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:46:55									
Curncy						P209		Curncy DES	
<b>Option Ticker Description</b>									
Page1/2									
Sample Option					Underlying Security				
Ticker	ECH4C	1.2900	Ticker	ECH4C	<CRNCY>	1.2600			
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4		1.2650			
Price	.0102		Price	1.2663		1.2700			
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000		1.2750			
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00		1.2800			
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2850			
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004	1.2900			
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004	1.2950			
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available			1.3000			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange						<b>Volatility Analysis</b>			
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00						
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00		Historical Volatility				
	Option		Future		30 Day HVT		10.07		
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000		60 Day HVT		10.22		
Tick Size	.0001		.0001		90 Day HVT		10.45		
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000		Implied		5.57		
						Delta		0.52486	
						Gama		*****	
Related Functions									
1) OMON Option Bid/Ask Monitor					2) HIVG Impl. Vol. Grap				
3) GPO Daily Bar Chart					4) OV Option Valuation				
5) GIP Intraday Price Chart									
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410			
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000			
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:47:06									



Curncy						P209		Curncy DES		
<b>Option Ticker Description</b>										
Sample Option								Underlying Security		Page1/2
Ticker	ECH4C	1.2950	Ticker	ECH4C	<CRNCY>			1.2600		
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4				1.2650		
Price	.0095		Price	1.2663				1.2700		
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000				1.2750		
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00				1.2800		
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2850		
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004			1.2900		
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2950		
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available				1.3000			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial	
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange								<b>Volatility Analysis</b>		
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00				Historical Volatility			
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00				30 Day HVT		10.07	
	Option		Future				60 Day HVT		10.22	
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000				90 Day HVT		10.45	
Tick Size	.0001		.0001				Implied		5.16	
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000				Delta		0.52630	
Related Functions								Gama		*****
1) OMON Option Bid/Ask Monitor					2) HIVG Impl. Vol. Grap					
3) GPO Daily Bar Chart					4) OV Option Valuation					
5) GIP Intraday Price Chart										
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410				
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000				
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:47:18										
Curncy						P209		Curncy DES		
<b>Option Ticker Description</b>										
Sample Option								Underlying Security		Page1/2
Ticker	ECH4C	1.3000	Ticker	ECH4C	<CRNCY>			1.2600		
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4				1.2650		
Price	.0075		Price	1.2663				1.2700		
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000				1.2750		
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00				1.2800		
First Trade	Mon	Mar 10, 2003	First Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2850		
Last Trade	Fri	Mar 05, 2004	Last Trade	Mon	Mar 15, 2004			1.2900		
Expiration	Fri	Mar 05, 2004	Last Delivery	Wed	Mar 17, 2004			1.2950		
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available				1.3000			
Cycle	---	---	Mar	---	Jun	---	Sep	---	Dec + serial	
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange								<b>Volatility Analysis</b>		
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00				Historical Volatility			
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00				30 Day HVT		10.07	
	Option		Future				60 Day HVT		10.22	
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000				90 Day HVT		10.45	
Tick Size	.0001		.0001				Implied		3.99	
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000				Delta		0.53234	
Related Functions								Gama		*****
1) OMON Option Bid/Ask Monitor					2) HIVG Impl. Vol. Grap					
3) GPO Daily Bar Chart					4) OV Option Valuation					
5) GIP Intraday Price Chart										
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410				
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000				
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:47:29										

Curncy						P209		Curncy DES		
Option Ticker Description										
Sample Option					Underlying Security					Page 1/2
Ticker	ECH4C	1.3050	Ticker	ECH4C	<CRNCY>	Strikes				
Name	Call on ECH4		Name	Call on ECH4		1.2650				
Price	.0065		Price	1.2663		1.2700				
Contract on	1 ECH4C	Future	Contract Size	EUR 125,000		1.2750				
Market Value	\$ 5,587.50		Contract Value	\$ 158,325.00		1.2800				
First Trade	Mon Mar 10, 2003		First Delivery	Wed Mar 17, 2004		1.2850				
Last Trade	Fri Mar 05, 2004		Last Trade	Mon Mar 15, 2004		1.2900				
Expiration	Fri Mar 05, 2004		Last Delivery	Wed Mar 17, 2004		1.2950				
Exercise Type	AMERICAN		Serial Options Available			1.3000				
Cycle	--- --- Mar		--- Jun --- Sep		--- Dec + serial					
Exchange Data (CME) Chicago Mercantile Exchange						Volatility Analysis				
Chicago Option	07:20-14:00		07:20-14:00			Historical Volatility				
Chicago Future	17:00-16:00		07:20-14:00			30 Day HVT	10.07			
	Option		Future			60 Day HVT	10.22			
Value of 1 pt	\$ 125,000		\$ 125,000			90 Day HVT	10.45			
Tick Size	.0001		.0001			Implied	.41			
Tick Value	\$ 12,5		\$ 125,000			Delta	0.53713			
Related Functions						Gama	*****			
1) OMON Option Bid/Ask Monitor			2) HIVG Impl. Vol. Grap							
3) GPO Daily Bar Chart			4) OV Option Valuation							
5) GIP Intraday Price Chart										
Australia 61 2 9777 8600		Brazil 5511 3048 4500		Europe 44 20 7330 7500		Germany 49 69 920410				
Hong Kong 852 2977 6000		Japan 81 3 3201 8900		Singapore 65 6212 1000		U.S. 1 212 318 2000				
Copyright 2004 Bloomberg L.P. G264-943-1 23-Jan-04 15:47:48										

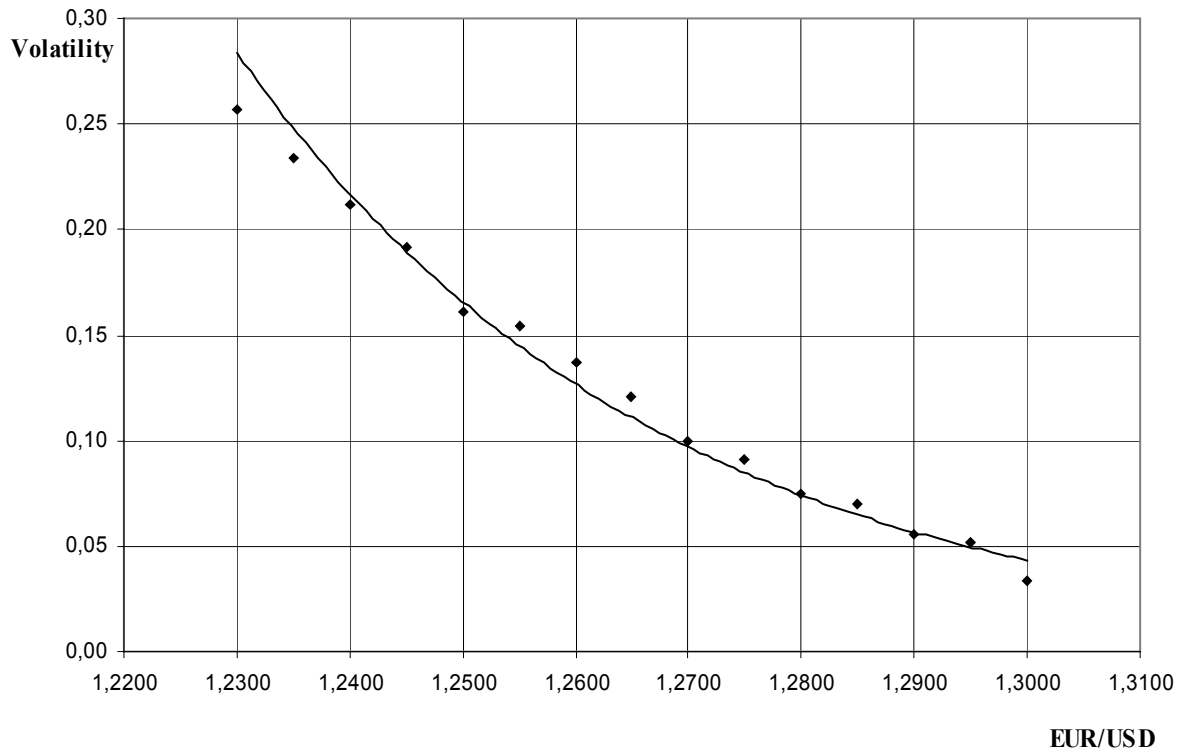
Obr. C.1 – 15 Bloomberg Screen (Dealing ČNB)

Pro lepší orientaci a snazší konstrukci grafu shrneme požadované údaje do tabulky.

Strikes	Volatility	Strikes	Volatility	Strikes	Volatility
1,2300	0,2566	1,2550	0,1543	1,2800	0,0751
1,2350	0,2338	1,2600	0,1373	1,2850	0,0698
1,2400	0,2122	1,2650	0,1209	1,2900	0,0557
1,2450	0,1917	1,2700	0,0993	1,2950	0,0516
1,2500	0,1613	1,2750	0,0908	1,3000	0,0339

Tab. C. 1 Hodnoty implikované volatility pro různé realizační ceny

Z tabulky C.1 i z níže uvedeného grafu C.1 je patrné, že s rostoucí realizační cenou klesá hodnota implikované volatility, tedy že dochází k jevu v odborné praxi i literatuře nazývaném *volatility skew*, což může znamenat, že se při kotaci dané opce obchodníci neřídili Garmanovou-Kohlhagenovou modifikací Blackova-Scholesova vzorce, nebo se o tento model opírali pouze orientačně, a protože si byli vědomi všech jeho nedokonalostí - zejména předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení měř zisku, určitým subjektivním odhadem upravili teoretické hodnoty a to především *out-of-the-money* a *in-the-money* opcí.



Graf C. 1 Volatility Skew

## Literatura

*Cox, J. C., Rubinstein, M.:* Option Pricing: A simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, No 7, 229 – 63, (1979).

*Bachelier, L.:* Théorie de la Spéculation. Gauthier-Villars, Paris (1900).

*Barone-Adesi, G. And Whaley, R. E.:* Efficient analytic approximation of American option values. *Journal of Finance*, 42 (June), 301 – 20, (1987).

*Black, F., Scholes, M.:* The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81, 637 – 54, (1973).

*Blake, D.:* Analýza finančních trhů. Grada Publishing, spol. s r. o., Praha 1995.

*Blaha, Z. S., Jindřichovská, I.:* Opce, swapy, futures – deriváty finančního trhu. Management Press, Praha (1997).

*Beneš, V., Musílek, P.:* Burzy a burzovní obchody. Informatorium, Praha (1991).

*Bollerslev, T.:* Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. *Journal of Econometrics* 31, 307 – 327, (1986).

*Briys, E.,* Options, Futures and Exotic Derivatives (Theory, Application and Practice). John Wiley&Sons, New York (1998).

*Broadie, M., Glasserman, P.:* A continuity Correction for Discrete Barrier Options. *Mathematical finance* 7, 325 – 49, (1997).

*Cipra, T.:* Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví. Ekopress, s. r. o., Praha (2002).

*Cipra, T.:* Matematika cenných papírů. HZ, Praha (2000).

*Dvořák, P.:* Přednášky z finančních derivátů. VŠE v Praze, Praha (2002).

*Engle, R.:* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica* 50, 987 – 1007, (1982).

*Garman, M. B. and Kohlhagen, S. W.:* Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance*, 2 (December), 231 – 7, (1983).

*Geske, R.:* The valuation of Compound Options. *Journal of Financial Economics* 7, 63 – 81, (1979).

*Goldman, B., Sosin, H.:* Path-Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High. *Journal of Finance* 34, 1111 – 27, (1979).

*Grabbe, J. O.:* The pricing of call and put options on Foreign Exchange. *Journal of International Money and Finance* 2, 239 – 53, (1983).

- Hull, J. C.:* Introduction to Futures And Options Markets. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1993).
- Hull, J. C.:* Options, Futures, And Other Derivative Securities. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (2002).
- Hull, J. C.:* Options, Futures, And Other Derivative Securities. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1991).
- Chorafas, D. N.:* How to Understand and Use Mathematics for Derivatives. Euromoney Books, Playhouse Yard (1995).
- Chriss, N. A.:* Option Pricing Models. Irwin (1997).
- Itô, K.:* On Stochastic Differential Equations. Memoirs, American Mathematical Society, 4, (1951).
- Jamshidian, F.:* An exact bond option pricing formula. Journal of Finance 44, 205 - 9, (1989).
- Jarrow, R., Turnbull, S.:* Derivative Securities. South-Western College Publishing (1996).
- Jilek, J.:* Finanční a komoditní deriváty. Grada Publishing, a. s., Praha (2002).
- Jilek, J.:* Termínové a opční obchody. Grada Publishing, spol. s r. o., Praha (1995).
- Kemma, A., Vorst, A.:* A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values. Journal of Banking and Finance, 14, 113 – 29, (March 1990).
- Málek, J.:* Opce a futures. VŠE, Praha (2000).
- Margrabe, W.:* The Value of an Option to Exchange One Asset for Another. Journal of Finance, 33, 177 – 86, (March 1978).
- Merton, R. C.:* Theory of rational option pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 141 – 83, (1973a).
- Merton, R. C.:* The relationship between put and call option prices: comment, Journal of Finance, 29, 183 – 4, (1973b).
- Osborne, M. F. M.:* Brownian Motion in the Stock Market. Operations Research, No. 7 (March – April 1959), 145 – 73, (1959).
- Rejnuš, O.:* Teorie a praxe obchodování s cennými papíry. Computer Press, Praha (2001).
- UBS Warburg:* Foreign Exchange and Money Market Transactions. UBS Warburg, Zurich (1998).

**Přednášky**

*Prof. RNDr. T. Cipra, DrSc.:* Úvod do finanční a pojistné matematiky (MFF UK & VŠE 2002).

*Doc. Ing. O. Dědek, CSc.:* Nástroje finančních trhů I a II (IES FSV UK 2002).

*Doc. Ing. M. S. Vošvrda, CSc.:* Analýza derivátů I a II (IES FSV UK 2003).

*Ing. K. Sladký, CSc.:* Stochastické procesy v ekonomii (IES FSV UK 2002).

**Internetové stránky**

[www.akcie.cz](http://www.akcie.cz)

[www.cbot.com](http://www.cbot.com)

[www.cnb.cz](http://www.cnb.cz)

[www.derivativesmodels.com](http://www.derivativesmodels.com)

[www.isda.com](http://www.isda.com)

[www.liffe.com](http://www.liffe.com)

[www.maths.ox.ac.uk](http://www.maths.ox.ac.uk)

**Interaktivní informační a obchodní systémy**

Bloomberg

Reuters