Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd

Institut ekonomických studií

Bakalářská práce

2004 **Andrej Dudík**

Univerzita Karlova v Praze
Fakulta sociálních věd

Institut ekonomických studií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Diferenčné rovnice druhého rádu a ich využitie v ekonomickom modelovaní

Vypracoval: **Andrej Dudík**
Vedoucí: **Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.**
Akademický rok: **2003/2004**

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil pouze uvedené prameny a literaturu

V Praze dne podpis studenta

Rád by som sa na tomto mieste poďakoval Doc. RNDr. Oldřichovi Johnovi, CSc. za cenné rady, čas a ochotu, ktorú mi venoval pri tvorbe tejto práce.

Projekt bakalárskej práce

Termín bakalárskej skúšky: Letný semester 2003/2004
Autor bakalárskej práce: Andrej Dudík
Vedúci bakalárskej práce: Doc. RNDr. Oldřich John, CSc.

Téma: Diferenčné rovnice druhého rádu a ich využitie v ekonomickom modelovaní

Zameranie: Naštudovanie 5. a 6. kapitoly z knihy Economic Dynamics, následné podrobné spracovanie uvádzaných ekonomickych modelov využívajúcich diferenčné rovnice druhého rádu (model multiplikátora-akcelerátora a model racionánych očakávaní a prispôsobovania na trhu). Ďalšia fáza zahŕňa preskúmanie modifikácii týchto modelov, tak ako je uvedené v literatúre, prípadne ďalšie možnosti modifikovania.

Osnova:
1. Popis matematického aparátu potrebného k modelom
2. Aplikácie k modelom akcelerátora a racionálnych očakávaní
3. Diskusia, prípadná modifikácia spomínaných modelov

Literatúra:
GANDOLFO, Giancarlo (1997): Economic Dynamics; Berlin, Springer
(prípadná časopisecká literatúra)

V Prahe dňa

Podpis vedúceho bakalárskej práce Podpis autora

Abstrakt

Diferenčné rovnice predstavujú jeden z možných spôsobov modelovania dynamických systémov, kedy čas uvažujeme iba v izolovaných pravidelných obdobiach. Táto práca sa zameriava na využitie diferenčných rovníc druhého rádu v ekonomických modeloch.

V prvej kapitole je vyložený základný matematický aparát používaný na kvantitatívnu aj kvalitatívnu analýzu lineárnych diferenčných rovníc druhého rádu.

V druhej a tretej kapitole sú potom vybudované metódy aplikované na dva makroekonomické modely - model multiplikátoru akcelerátoru a model dynamického agregovaného dopytu a dynamickej agregovanej ponuky. V oboch modeloch sa venuje práca okrem určenia sledovaných veličín predovšetkým problémom stability a monotónnosti prispôsobovacieho procesu. Taktiež je tu diskutovaná reakcia systému na hospodársku politiku.

Abstract

Difference equations represent a possible method of modeling of dynamic systems, with property of the isolated time periods. This work focuses on utilization of second-order difference equations in economic models.

Basic mathematical apparatus used for quantitative as well as qualitative analysis of second-order linear difference equations is explained in the first chapter.

Then, in the second and the third chapters, the methods listed above are applied on analysis of two macroeconomic models - the multiplier-accelerator model and the dynamic aggregate demand and dynamic aggregate supply model. Besides estimation of solution of the observed variables, the attention is paid to the problems of stability and monotonicity of adjustment process. The reaction of system on economic policy is also discussed in the work.

Obsah

Úvod

Rozsiahla časť ekonomickej teórie sa venuje popisovaniu a modelovaniu dynamických systémov, kde si všíma vlastnosti prispôsobenia systému daným podmienkam. V týchto môže vystupovať čas buď ako spojitá veličina, alebo vo forme izolovaných časových úsekov. Druhý z týchto prípadov môže byť motivovaný viacerými faktormi – napríklad jednoduchším numerickým výpočtom riešenia, poprípade tým, že niektoré informácie o ekonomike sú dostupné iba vo forme sezónnych štatistík. Práve v takýchto prípadoch možno použiť ako spôsob popisu systému diferenčné rovnice, teda funkcionálne rovnice, kde neznámou je postupnosť niektorej zo sledovaných veličín.

Táto práca sa venuje využitiu diferenčných rovníc druhého rádu s konštantnými koeficientami v ekonomických modeloch.

V 1. kapitole popisuje matematický aparát, ktorý neskôr použijeme pri analýze samotných ekonomických modelov. Okrem definície pojmu diferenčnej rovnice a základných spôsobov ich riešenia sú tu taktiež vyložené tie tvrdenia z lineárnej algebry, o ktoré sa opierajú tvrdenia použité v teórii diferenčných rovníc. Vo výklade teórie tejto časti sa práca opiera o diela [3] a [5].

V ďalších dvoch kapitolách potom aplikujeme vybudovanú teóriu riešenia diferenčných rovníc na dva makroekonomické modely. Prvým z nich je model multiplikátoru-akcelerátoru, ktorý ako jeden z prvých popisoval hospodársky cyklus ako výsledok vnútorných síl v ekonomike. Model je najprv uvedený a analyzovaný v najzákladnejšom tvare, ktorý v nasledujúcich podkapitolách obohatíme zavedením zdaňovania, neskôr potom zavedením pôsobenia úrokových mier a vplyvu trhu peňazí. Budeme pritom skúmať, akým spôsobom pozmenia tieto modifikácie chovanie systému.

Druhým z diskutovaných modelov je model dynamickej agregovanej ponuky a dynamického agregovaného dopytu (DAD-DAS model), ktorý na rozdiel od keynesiánskeho charakteru prvého uvažovaného modelu odráža skúsenosti s inflačným vývojom obdobia 70-tych rokov 20. storočia.

V oboch sledovaných modeloch sa budeme zameriavať predovšetkým na stabilitu popisovaného systému a na monotónnosť prispôsobovacieho procesu. V súvislosti s tým si budeme všímať aj dopady aktívnej hospodárskej politky štátu na ekonomiku.

Kapitola I

Spôsoby riešenia diferenčných rovníc

I.1 Niektoré dôležité pojmy z lineárnej algebry

Predtým, ako pristúpime k zavedeniu diferenčných rovníc a samotným spôsobom ich riešenia, uvedieme niektoré pojmy a tvrdenia z lineárnej algebry, ktoré budeme ďalej používať.

Jedná sa najmä o pojem vektorových priestorov, ktoré nám zjednodušia prácu s postupnosťami, a o lineárne zobrazenia a ich vlastnosti.

I.1.1 Vektorové priestory

Definícia I.1 *(Reálny vektorový priestor)*
Vektorovým priestorom nad $\mathbb{R}$ *rozumieme usporiadanú trojicu* $(\mathbf{V}, \oplus, \odot)$, *kde* $\mathbf{V}$ *je neprázdna množina,* $\oplus$ *je operácia z* $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ *do* $\mathbf{V}$ *a* $\odot$ *je operácia z* $\mathbb{R} \times \mathbf{V}$ *do* $\mathbf{V}$*, pričom platí:*

(i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$

(ii) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V} : (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w})$

(iii) $\exists \mathbf{o} \in \mathbf{V}\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{v} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{v}$ ($\mathbf{o}$ *nazývame aj nulovým prvkom*)

(iv) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}\ \exists \mathbf{u} \in \mathbf{V} : \mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{o}$ ($\mathbf{u}$ *nazývame aj opačným prvkom k* $\mathbf{v}$)

(v) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} : a \odot (b \odot \mathbf{v}) = (a.b) \odot \mathbf{v}$

(vi) $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} : (a + b) \odot \mathbf{v} = (a \odot \mathbf{v}) \oplus (b \odot \mathbf{v})$

(vii) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V} : a \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (a \odot \mathbf{u}) \oplus (a \odot \mathbf{v})$

(viii) $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} : 1 \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}$

Poznámka

(i) Prvky množiny $\mathbf{V}$ nazývame vektormi.

(ii) Operácie $\oplus$ a $\odot$ nazývame súčet vektorov a násobenie vektoru reálnym číslom.

(iii) Jeden z možných vektorových priestorov je $(\{\mathbf{o}\}, \oplus, \odot)$. Tento nazývame triviálnym vektorovým priestorom.

(iv) Dá sa dokázať, že opačný aj nulový prvok sú určené jednoznačne.

(v) Majme na pamäti, že ak $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, tak aj všetky jeho násobky $a \odot \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, kde $a \in \mathbb{R}$.

Príklad I.2 (Vektorový priestor postupností)
Nech $\mathbf{V}$ je množina všetkých postupností $\{a(t)\}_{t=1}^{+\infty}$, $a(t) \in \mathbb{R}$, operácia $\oplus$ je definovaná predpisom $\{a(t)\}_{t=1}^{+\infty} \oplus \{b(t)\}_{t=1}^{+\infty} = \{a(t) + b(t)\}_{t=1}^{+\infty}$ a operácia $\odot$ je definovaná predpisom $\alpha \odot \{a(t)\}_{t=1}^{+\infty} = \{\alpha.a(t)\}_{t=1}^{+\infty}$
Jednoduchým overením sa možno presvedčiť, že trojica $(\mathbf{V}, \oplus, \odot)$ má vlastnosti (i)-(viii) z Definície I.1 a teda je vektorovým priestorom. Tento priestor budeme označovať symbolom $\mathfrak{s}$.

Príklad I.3
Zaveďme ešte isté rozšírenie vektorového priestoru $\mathfrak{s}$.
Nech $\mathbf{V}^*$ je množina všetkých postupností $\{a(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$, $a(t) \in \mathbb{R}$, operácie $\oplus$ a $\odot$ sú definované obdobne, ako v príklade I.2.
Rovnako aj táto usporiadaná trojica $(\mathbf{V}^*, \oplus, \odot)$ spĺňa definíciu vektorového priestoru, tento v.p. budeme označovať $\tilde{\mathfrak{s}}$.

Definícia I.4 *(Vektorový podpriestor)*
Nech $(\mathbf{V}, \oplus, \odot)$ *je vektorový priestor nad* $\mathbb{R}$*,* $\mathbf{U} \subset \mathbf{V}$ *neprázdna množina. Potom* $(\mathbf{U}, \oplus, \odot)$ *nazývame* ***vektorovým podpriestorom*** *priestoru* $(\mathbf{V}, \oplus, \odot)$*, pokiaľ*

(i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U} : \mathbf{u} \oplus \mathbf{v} \in \mathbf{U}$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} : a \odot \mathbf{u} \in \mathbf{U}$

Poznámka
Z definície je ihneď vidieť, že $(\mathbf{U}, \oplus, \odot)$ je vektorový priestor.

Príklad I.5
Ako príklad vektorového podpriestoru $\tilde{\mathfrak{s}}$ môžeme uviesť priestor $(\mathbf{U}, \oplus, \odot)$, kde $\mathbf{U} = \{\{A.{\lambda_1}^t + B.{\lambda_2}^t\}_{t=-\infty}^{+\infty}\ A, B \in \mathbb{R}\}$ pričom $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sú dané čísla

a operácie $\oplus$ a $\odot$ sú totožné s tými z $\tilde{\mathfrak{s}}$. Dosadením sa môžeme ľahko presvedčiť, že trojica spĺňa podmienky v Definícii I.4.
Inými príkladmi by mohli byť usporiadané trojice, v ktorých $\mathbf{U} = \{\{A.\lambda^t + B.t\lambda^t\}_{t=-\infty}^{+\infty}\ A, B \in \mathbb{R}\}$, alebo $\mathbf{U} = \{\{A.\alpha^t \cos \nu t + B.\alpha^t \sin \nu t\}_{t=-\infty}^{+\infty}\ A, B \in \mathbb{R}\}$, v ktorých α, λ, ν sú reálne čísla.
Naopak, množina všetkých postupností nezáporných čísel nie je vektorovým podpriestorom $\mathfrak{s}$, ani množina všetkých postupností celých (alebo dokonca racionálnych) čísel nie je vektorovým podpriestorom $\mathfrak{s}$, keďže nespĺňajú podmienku (ii). Taktiež zrejme $\mathfrak{s}$ nie je vektorovým podpriestorom $\tilde{\mathfrak{s}}$.

Dohovor I.6

(i) Namiesto $\oplus$ a $\odot$ budeme naďalej písať $+$ a $.$; treba však mať na pamäti, že sa jedná o iné operácie ako $+$ a $.$ v $\mathbb{R}$.

(ii) Namiesto $(\mathbf{V}, \oplus, \odot)$ budeme naďalej písať iba $\mathbf{V}$. Rozlíšenie medzi $\mathbf{V}$ ako vektorovým priestorom a $\mathbf{V}$ ako množinou vektorov je obvykle zrejmé z kontextu.

(iii) Pri zápise postupností priestoru $\tilde{\mathfrak{s}}$ budeme niekedy namiesto $\{a(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ písať zjednodušený tvar $\{a(t)\}$

Definícia I.7 *(Lineárna kombinácia)*
Nech $\mathbf{V}$ *je vektorový priestor,* $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m \in \mathbf{V}$ *a* $\alpha_1, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$. ***Lineárnou kombináciou*** *vektorov* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$ *s koeficientami* $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *nazývame výraz* $\alpha_1.\mathbf{u}_1 + ... + \alpha_m.\mathbf{u}_m$ *Pokiaľ* $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, *hovoríme o* ***triviálnej lineárnej kombinácii****, v opačnom prípade o* ***netriviálnej lineárnej kombinácii****.*

Definícia I.8 *(lineárna nezávislosť vektorov)*
Nech $\mathbf{V}$ *je vektorový priestor*
Povieme, že vektory $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m \in \mathbf{V}$ *sú* ***lineárne závislé****, pokiaľ existuje netriviálna lineárna kombinácia vektorov* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_m$ *rovná* $\mathbf{o}$.
V opačnom prípade hovoríme o ***lineárne nezávislých*** *vektoroch.*

Definícia I.9 *(Báza a dimenzia vektorového priestoru)*
Nech $\mathbf{V}$ *je vektorový priestor.*
Ako ***bázu vektorového priestoru*** *označíme množinu* $\mathbf{B} \subset \mathbf{V}$ *takú, že*

(i) prvky $\mathbf{B}$ *sú lineárne nezávislé*

(ii) každý prvok z $\mathbf{V}$ *možno zapísať ako lineárnu kombináciu prvkov bázy*

Dimenziou vektorového priestoru *označujeme počet prvkov bázy, píšeme* $\dim \mathbf{V}$

Poznámka

(i) Každý vektorový priestor má bázu.

(ii) Zatiaľ čo dimenzia vektorového priestoru je určená jednoznačne, tak platí, že ľubovoľný netriviálny vektorový priestor má nekonečne mnoho navzájom rôznych báz.
Báza Triviálneho v.p. je prázdna množina.

(iii) Pokiaľ $\dim \mathbf{V} < +\infty$, hovoríme, že $\mathbf{V}$ je konečnerozmerný v.p.
Pokiaľ $\dim \mathbf{V} = +\infty$, hovoríme, že $\mathbf{V}$ je nekonečnerozmerný v.p.

Priestory $\mathfrak{s}$ aj $\tilde{\mathfrak{s}}$ z príkladov I.2 a I.3 sú nekonečnerozmerné.

I.1.2 Lineárne zobrazenia

Definícia I.10 *(lineárne zobrazenie)*
Nech $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ *sú vektorové priestory. Zobrazenie* $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *nazveme* ***lineárnym****, pokiaľ*

- $\forall u, v \in \mathbf{U} : f(u + v) = f(u) + f(v)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall u \in \mathbf{U} : f(\alpha.u) = \alpha.f(u)$

Poznámka
Takto definované lineárne zobrazenie zodpovedá "intuitívnemu" pojmu linearity: Grafom lineárneho zobrazenia z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ je priamka ($n = 1$), resp. nadrovina priestoru $\mathbb{R}^{n+1}$ prechádzajúca bodom $\mathbf{o}$.

Príklad I.11
Nech $F : \tilde{\mathfrak{s}} \to \tilde{\mathfrak{s}}$ je zadaná predpisom

$$F(\{y(t)\}) = \{c_0.y(t) + c_1.y(t-1) + c_2.y(t-2)\}\,, \quad \{y(t)\} \in \tilde{\mathfrak{s}} \tag{I.1}$$

pričom $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_0, c_2 \neq 0$ sú dané konštanty.
Potom F je lineárne, pretože spĺňa:

(i) $F(\{a(t)\} + \{b(t)\}) = F(\{a(t) + b(t)\}) =$
$= \{c_0(a(t) + b(t)) + c_1(a(t-1) + b(t-1)) + c_2(a(t-2) + b(t-2))\} =$
$= \{c_0 a(t) + c_1 a(t-1) + c_2 a(t-2)\} + \{c_0 b(t) + c_1 b(t-1)+$
$+ c_2 b(t-2)\} = F(\{a(t)\}) + F(\{b(t)\})$

(ii) $F(\alpha.\{b(t)\}) = F(\{\alpha.b(t)\}) = \{c_0 \alpha b(t) + c_1 \alpha b(t-1)+$
$+ c_2 \alpha b(t-2)\} = \alpha(\{c_0 b(t) + c_1 b(t-1) + c_2 b(t-2)\}) =$
$= \alpha F(\{b(t)\})$

Dohovor I.12
Symbolom F označujme naďalej také zobrazenie z $\tilde{\mathfrak{s}}$ do $\tilde{\mathfrak{s}}$, ktoré je definované predpisom (I.1)

Príklad I.13 (diferencia)
Nech operátor $\Delta : \tilde{\mathfrak{s}} \to \tilde{\mathfrak{s}}$ je zadaný predpisom

$$\Delta(\{a(t)\}) = \{a(t) - a(t-1)\}, \qquad \{a(t)\} \in \tilde{\mathfrak{s}}$$

Potom Δ je lineárne zobrazenie, presvedčiť sa o tom môžeme obdobným postupom ako v Príklade I.11.

Tento operátor nazývame diferenciou.

Definícia I.14 *(jadro lineárneho zobrazenia)*
Nech $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineárne zobrazenie.
***Jadrom lineárneho zobrazenia** rozumieme takú podmnožinu $\mathbf{U}$, že každý jej prvok sa zobrazí na $\mathbf{o}$; označujeme* $\ker(f)$

Tvrdenie I.15 *Nech $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineárne zobrazenie.*
Potom $\ker(f)$ je podpriestorom $\mathbf{U}$.

(dôkaz tvrdenia možno nájsť v [**5**], Veta IX.28 (i))

Uvažujme teraz nasledovnú úlohu:
K danému lineárnemu zobrazeniu $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a vektoru $b \in \mathbf{V}$ nájdite všetky $x \in \mathbf{U}$ také, že

$$f(x) = b \tag{I.2}$$

jej riešenie nás vedie k formulácii nasledovnej vety:

Veta I.16 *Nech $x_0 \in \mathbf{U}$ je riešením rovnice (I.2).*
Potom $\{x_0 + \omega; \ \omega \in \ker(f)\}$ je množinou všetkých riešení rovnice (I.2)

(dôkaz vety možno nájsť v [**5**], Veta IX.32)

Pokiaľ je teda $\dim \ker(f) < +\infty$ a $\{x_1, ..., x_m\}$ je jeho báza, potom na vyriešenie úlohy stačí nájsť ľubovoľné riešenie x_0 rovnice (I.2) (pokiaľ také existuje). Všeobecné riešenie možno vtedy písať v tvare

$$x = x_0 + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n \qquad ; \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$$

I.2 Lineárne diferenčné rovnice druhého rádu

V tejto časti si ukážeme, ako pojmy a tvrdenia z predošlej časti využiť pri riešení diferenčných rovníc. Začnime ale najprv ich definíciou.

Definícia I.17 *(lineárna diferenčná rovnica druhého rádu)*
Lineárnou diferenčnou rovnicou druhého rádu *označujeme rovnicu v tvare*

$$c_0 y(t) + c_1 y(t-1) + c_2 y(t-2) = x(t), \quad t \in \mathbb{Z} \tag{I.3}$$

kde $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_0, c_2 \neq 0$ *sú dané konštanty,* $x(t) \in \tilde{\mathfrak{s}}$ *je zadaná postupnosť. Neznámou je postupnosť* $y(t)$
Riešením lineárnej diferenčnej rovnice *rozumieme také* $y(t) \in \tilde{\mathfrak{s}}$*, ktoré spĺňa (I.3)*

Poznámka

(i) Nenulovosť konštánt c_0, c_2 je v našom prípade veľmi dôležitá, v opačnom prípade by sme dostali rovnice nižších rádov.

(ii) Rovnica

$$F(y(t)) = x(t), \quad t \in \mathbb{Z} \tag{I.4}$$

kde $x(t) \in \tilde{\mathfrak{s}}$ je zadaná postupnosť, je stručným zápisom (I.3). Z linearity zobrazenia F potom vyplýva aj názov lineárna diferenčná rovnica.

Možný spôsob riešenia (I.4) ukazuje Veta I.16. Podľa nej $\{a(t) + b(t) \ : \ b(t) \in \ker(F),\ a(t) \text{ rieši (I.4)}\}$ je množinou všetkých riešení (I.3) a (I.4). Sformulujme teda nasledovnú definíciu a po nej vetu, ktorá určuje všeobecné riešenie (I.3)

Definícia I.18 *(homogénna lineárna diferenčná rovnica)*
Homogénnou rovnicou *k (I.3) budeme rozumieť rovnicu v tvare*

$$y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{I.5}$$

kde $a_1 = \frac{c_1}{c_0}$ *a* $a_1 = \frac{c_2}{c_0}$

Veta I.19 *(tvar riešenia lineárnej diferenčnej rovnice)*
Nech postupnosť $y_p(t)$ *je riešením (I.3)*
Potom každé riešenie (I.3) je možné písať v tvare

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t), \quad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{I.6}$$

kde $y_h(t)$ *rieši (I.5)*

Dôkaz Stačí si uvedomiť, že množina riešení (I.5) je totožná s $\ker(F)$. Z Vety I.16 potom okamžite plynie platnosť tvrdenia ■

Uvedená veta ukazuje teda aj postup riešenia rovnice (I.3), kedy postup rozdelíme na dva kroky. Jeden krok bude riešenie homogénnej rovnice (I.5) a druhý bude nájdenie ľubovoľnej postupnosti, ktorá rieši (I.3). Všeobecné riešenie bude súčtom týchto dvoch postupností.

I.3 Riešenie homogénnej rovnice

Lemma I.20
Množina riešení rovnice (I.5) tvorí vektorový podpriestor priestoru $\tilde{\mathfrak{s}}$ dimenzie 2 .

(dôkaz vety možno nájsť v [**5**], Veta XII.2)

Definícia I.21 *(fundamentálny systém)*
*Bázu priestoru riešení homogénnej rovnice nazývame **fundamentálnym systémom** riešení rovnice (I.5).*

Veľmi užitočným pojmom pri riešení rovnice (I.5) sa ukazuje byť pojem charakteristického polynómu:

Definícia I.22 *(charakteristický polynóm)*
***Charakteristickým polynómom** k (I.5) označujeme zobrazenie $\chi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, zadané predpisom:*

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \tag{I.7}$$

Veta I.23 *(tvar fundamentálneho systému)*
Nech λ_1 a λ_2 sú korene rovnice $\chi(\lambda) = 0$.
Potom

(i) pokiaľ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak postupnosti $y_1(t) = \{{\lambda_1}^t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ a $y_2(t) = \{{\lambda_2}^t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ tvoria fundamentálny systém k (I.5).

(ii) pokiaľ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, tak postupnosti $y_1(t) = \{\lambda^t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ a $y_2(t) = \{t.\lambda^t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ tvoria fundamentálny systém k (I.5).

(iii) pokiaľ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $Im(\lambda_1) \neq 0$, tak postupnosti $y_1(t) = \{|\lambda|^t \cos \nu t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ a $y_2(t) = \{|\lambda|^t \sin \nu t\}_{t=-\infty}^{+\infty}$, kde $|\lambda|^t$ je modul λ_1 a μ je argument[1] λ_1, tvoria fundamentálny systém k (I.5).

[1] nech $z = a + bi$. z môžeme alternatívne písať ako $\nu(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, kde $\mu = \sqrt{a^2 + b^2}$ označujeme ako modul z a $\varphi \in< 0 \, , \, 2\pi)$ ako argument z

Dôkaz

(i) Najprv sporom dokážeme lineárnu nezávislosť postupností $\{{\lambda_1}^t\}$ a $\{{\lambda_2}^t\}$.
Nech koeficienty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $[\alpha, \beta] \neq \mathbf{o}$ sú také, že $\forall t \in \mathbb{Z} : \alpha{\lambda_1}^t + \beta{\lambda_2}^t = 0$. Pre $t = 0$ dostávame $\alpha + \beta = 0$, teda $\beta = (-\alpha)$. Pre $t = 1$ dostávame $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0$, úpravou čoho dostávame $\alpha(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Keďže $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tak nutne $\alpha = 0$ a teda aj $\beta = 0$, čo je spor s predpokladom $[\alpha, \beta] \neq 0$.

Ďalej si ukážme, že postupnosti $\{{\lambda_1}^t\}$ a $\{{\lambda_2}^t\}$ riešia (I.5), o čom sa môžeme presvedčiť priamym dosadením:

$$
{\lambda_1}^t + a_1{\lambda_1}^{t-1} + a_2{\lambda_1}^{t-2} = {\lambda_1}^{t-2}\left({\lambda_1}^2 + a_1\lambda_1 + a_2\right) = {\lambda_1}^{t-2}\chi(\lambda_1) = 0\,,
$$

(obdobne aj pre λ_2)
Keďže podľa Lemmy I.20 je $\dim\ker(F) = 2$, tak $\left\{\{{\lambda_1}^t\}_{t=-\infty}^{+\infty}\,,\ \{{\lambda_2}^t\}_{t=-\infty}^{+\infty}\right\}$ je bázou $\ker(F)$.

(ii) Tvrdenie možno dokázať obdobným postupom ako v (i).

(iii) Lineárnu nezávislosť uvedených postupností možno dokázať obdobne ako v (i). Uvažujme ďalej, že $y(t) = |\lambda|^t \sin\nu t$. Úpravami dostávame:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= |\lambda|^t\left(i^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\sin\nu t + i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\cos\nu t\right) \\
&= \frac{1}{2}i|\lambda|^t(\cos\nu t - i\sin\nu t) - \frac{1}{2}i|\lambda|^t(\cos\nu t + i\sin\nu t) \\
&= -\frac{1}{2}i{\lambda_1}^t + \frac{1}{2}i{\lambda_2}^t
\end{aligned}
$$

Po dosadení do (I.5) dostávame

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}i{\lambda_2}^t - \frac{1}{2}i{\lambda_1}^t\right) + a_1\left(\frac{1}{2}i{\lambda_2}^{t-1} - \frac{1}{2}i{\lambda_1}^{t-1}\right) + a_2\left(\frac{1}{2}i{\lambda_2}^{t-2} - \frac{1}{2}i{\lambda_1}^{t-2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}i{\lambda_2}^{t-2}\left({\lambda_2}^2 + a_1\lambda_2 + a_2\right) - \frac{1}{2}i{\lambda_1}^{t-2}\left({\lambda_1}^2 + a_1\lambda_1 + a_2\right) = \\
&= \frac{1}{2}i{\lambda_2}^{t-2}\chi(\lambda_2) - \frac{1}{2}i{\lambda_1}^{t-2}\chi(\lambda_1) = 0
\end{aligned}
$$

Postupnosť $|\lambda|^t \sin\nu t$ teda rieši (I.5).
Podobným postupom môžeme ukázať, že aj $|\lambda|^t\cos\nu t$ rieši (I.5). Nakoniec, podľa Lemmy I.20 je $\dim\ker(F) = 2$, takže $\{\{|\lambda|^t\cos\nu t\}_{t=-\infty}^{+\infty},\ \{|\lambda|^t\sin\nu t\}_{t=-\infty}^{+\infty}\}$ je bázou $\ker(F)$ ■

Všeobecné riešenie (I.5) už potom určíme jednoducho. Nech $y_A(t)$ a $y_B(t)$ sú prvky fundamentálneho systému určeného podľa Vety I.23. Vtedy všeobecné riešenie (I.5) $y(t)$ je dané predpisom

$$y(t) = A.y_A(t) + B.y_B(t), \qquad A, B \in \mathbb{R},\ \ t \in \mathbb{Z}$$

V prípade (iii) Vety I.23 môžeme všeobecné riešenie zapísať aj v tvare

$$y(t) = C.|\lambda|^t \cos(\nu t + \epsilon), \qquad C \geq 0,\ \epsilon \in <0\ ,\ 2\pi),\ t \in \mathbb{Z}$$

I.4 Hľadanie partikulárneho riešenia

Ďalším krokom riešenia lineárnych diferenčných rovníc je nájdenie ľubovoľného, tzv. partikulárneho riešenia rovnice I.3. Metódy rozpracované v tomto oddieli nemusia stačiť k nájdeniu riešenia pre každú pravú stranu rovnice (I.3), avšak pre potreby analýzy ekonomických modelov v nasledujúcich kapitolách postačia. Platí ale, že vždy existuje riešenie ľubovoľnej rovnice (I.3), dôkaz takého tvrdenia ale presahuje rámec tohto textu.

Ukážme si na tomto mieste tvar partikulárneho riešenia pre najjednoduchšie pravé strany rovnice (I.3), teda pre konštantné a exponenciálne postupnosti a ich súčet.

Veta I.24 *(pravá strana v tvare exponenciálnej funkcie)*
Nech v rovnici (I.3) má pravá strana tvar

$$x(t) = k.\alpha^t, \qquad k, \alpha \in \mathbb{R},\ \ t \in \mathbb{Z}$$

Potom riešenie (I.3) možno nájsť v tvare:

(i) $y_p(t) = \dfrac{k.\alpha^{t+2}}{c_0\alpha^2 + c_1\alpha + c_2}$, *pokiaľ* $\chi(\alpha) \neq 0$.

(ii) $y_p(t) = -\dfrac{k.t.\alpha^{t+2}}{c_1\alpha + 2c_2}$, *pokiaľ* $\chi(\alpha) = 0$ *a súčasne* $\chi'(\alpha) \neq 0$.

(iii) $y_p(t) = \dfrac{k.t^2.\alpha^{t+2}}{2c_2}$, *pokiaľ* $\chi(\alpha) = 0$ *a súčasne* $\chi'(\alpha) = 0$.

Dôkaz

(i) Tvrdenie dokážeme priamo dosadením za $y_p(t)$ do ľavej strany (I.3). Dostávame:

$$c_0\frac{k.\alpha^{t+2}}{c_0\chi(\alpha)} + c_1\frac{k.\alpha^{t+1}}{c_0\chi(\alpha)} + c_2\frac{k.\alpha^t}{c_0\chi(\alpha)} = \frac{c_0\chi(\alpha).k.\alpha^t}{c_0\chi(\alpha)} = k.\alpha^t = x(t)$$

(ii) Taktiež ako v (i), tvrdenie možno dokázať priamym dosadením a úpravami.

(iii) Najprv si rozmyslime, že $c_1\alpha + 2c_2 = 0$. To možno dokázať pomocou Viètovych vzťahov. Keďže platí, že α je dvojnásobný koreňom χ , pre koeficienty χ vychádza:

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_0.2\alpha \\ c_2 &= c_0\alpha^2 , \end{aligned}$$

odkiaľ už okamžite plynie rovnosť $c_1\alpha + 2c_2 = 0$.
Pokiaľ dosadíme $y_p(t)$ do (I.3) dostávame

$$\begin{aligned} c_0\frac{k.t^2.\alpha^{t+2}}{2c_2} + c_1\frac{k(t-1)^2.\alpha^{t+1}}{2c_2} + c_2\frac{k.(t-2)^2.\alpha^t}{2c_2} &= \\ = \frac{c_0k.t^2\alpha^t\chi(\alpha) + kt\alpha^t(c_1\alpha) - 2c_2 + k\alpha^t(c_1\alpha + 2c_2 + 2c_2)}{2c_2} &= \\ = \frac{0 - 0 + k\alpha^t(0 + 2c_2)}{2c_2} = k\alpha^t = x(t) \quad &\blacksquare \end{aligned}$$

Veta I.25 *(partikulárne riešenie ako súčet postupností)*
Nech $u(t)$ rieši rovnicu

$$c_0y(t) + c_1y(t-1) + c_2y(t-2) = p(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

a $v(t)$ rieši rovnicu

$$c_0y(t) + c_1y(t-1) + c_2y(t-2) = q(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

Potom $y(t) = u(t) + v(t)$ rieši rovnicu

$$c_0y(t) + c_1y(t-1) + c_2y(t-2) = p(t) + q(t), \quad t \in \mathbb{Z}$$

Dôkaz Platí $F(u(t)) = p(t)$ a $F(v(t)) = q(t)$. Z linearity F potom ihneď plynie aj dokazované tvrdenie $\blacksquare$

Veta I.25 teda tvrdí, že partikulárne riešenie k (I.3) možno hľadať ako súčet riešení pre postupnosti, ktorých súčet je rovný $x(t)$.

Na záver ešte zhrňme, ako vyzerá všeobecné riešenie rovnice (I.3):
Nech $y_A(t)$ a $y_B(t)$ sú prvky fundamentálneho systému homogénnej rovnice (I.5)
Nech $y_1(t)$, až $y_k(t)$ sú riešenia diferenčných rovníc s pravými stranami

$g_1(t), ..., g_k(t)$, pričom $\sum_{i=1}^{k} g_i(t) = x(t)$
Potom všeobecné riešenie rovnice (I.3) má tvar

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} y_i(t) + A.y_A(t) + B.y_B(t) \qquad ; A, B \in \mathbb{R} \tag{I.8}$$

Zadaním hodnoty postupnosti $y(t)$ v 2 rôznych časoch, napríklad $y(t_0) = y_0$ a $y(t_1) = y_1$ je z tvaru všeobecného riešenia (I.8) vidieť, že tým jednoznačne určíme aj hodnoty A a B a teda aj konkrétne riešenie $y(t)$.

Najčastejšie sa stretávame s tým, že veličina y je určená v po sebe idúcich časoch $t_0 = 0$ a $t_1 = 1$, čo nás vedie k zavedeniu pojmu tzv. počiatočných podmienok.

Definícia I.26 *(počiatočné podmienky)*
*Podmienky $y(0) = y_0$ a $y(1) = y_1$ nazývame **počiatočnými podmienkami** pre rovnicu I.3.*

I.5 Kvalitatívna analýza homogénnej rovnice

Častokrát je vhodné poznať vlastnosti riešení rovníc (I.3) a (I.5) aj bez znalosti presného zápisu riešenia $y(t)$. Zaujíma nás predovšetkým či riešenie homogénnej rovnice (I.5) sa pre veľké t blíži k nulovému riešeniu a či je toto riešenie od istého členu monotónne.

I.5.1 Stabilita riešenia

Definícia I.27 *(stabilita nulového riešenia homogénnej rovnice)*

(i) *Povieme, že nulové riešenie homogénnej rovnice (I.5) je **stabilné**, pokiaľ*
$\exists t_0 \in \mathbb{N}\ \forall t \geq t_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ (|y_h(t_0)| < \delta \wedge |y_h(t_0 + 1)| < \delta) \Rightarrow |y_h(t)| < \varepsilon$

(ii) *Povieme, že nulové riešenie homogénnej rovnice (I.5) je **asymptoticky stabilné**, pokiaľ je stabilné a navyše* $\lim_{t \to +\infty} y_h(t) = 0$

(iii) *Povieme, že nulové riešenie homogénnej rovnice (I.5) je **nestabilné**, ak nie je stabilné.*

Poznámka Definícia sa dá vyložiť nasledovne:
Nech $\bar{y}(t)$ je nejaké riešenie (I.3). Triviálne riešenie homogénnej rovnice je stabilné, pokiaľ aj v prípade (dostatočne malého) vychýlenia od $\bar{y}$ v čase t_0 bude maximálna vzdialenosť vychýleného riešenia od $\bar{y}(t)$ ohraničená (t.j.

vzdialenosť vychýleného riešenia homogénnej rovnice od nulového riešenia je ohraničená). Pre zvolené ohraničenie maximálnej odchýlky sme schopní nájsť taktiež nejaké ohraničenie veľkosti výchylky v t_0.
Asymptotická stabilita navyše znamená, že všetky riešenia homogénnej rovnice budú konvergovať k 0, a teda aj ich vzájomná vzdialenosť bude konvergovať k 0. Pokiaľ teda $\bar{y}(t)$ je nejaké partikulárne riešenie (I.3) udáva istú rovnovážnu situáciu, potom sa budú všetky ostatné riešenia s rastúcim časom čoraz viac tomuto trendu prispôsobovať.
Napokon nulové riešenie homogénnej rovnice je nestabilné, pokiaľ ľubovoľne malá odchýlka pozmeneného riešenia od $\bar{y}(t)$ spôsobí, že s rastúcim t prekoná veľkosť maximálnej odchýlky každú mieru.

Dohovor I.28
Namiesto stability nulového riešenia homogénnej rovnice budeme naďalej hovoriť o stabilite homogénnej rovnice.

Ukazuje sa, že stabilita rovnice (I.5) závisí výlučne na hodnote toho z koreňov charakteristického polynómu χ, ktorý má väčší modul.

Lemma I.29
Nech λ_1, λ_2 sú korene charakteristického polynómu, pričom predpokladajme, že $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$.
Potom homogénna rovnica (I.5) je stabilná práve vtedy, keď $|\lambda_1| \leq 1$ a asymptoticky stabilná práve vtedy, keď $|\lambda_1| < 1$.

Dôkaz V prípade navzájom rôznych reálnych koreňov môžeme písať všeobecné riešenie (I.5) v tvare

$$y_h(t) = A{\lambda_1}^t + B{\lambda_2}^t = {\lambda_1}^t \left(A + B \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \right)$$

Pokiaľ $|\lambda_1| = 1$, potom $\lim_{t\to+\infty} |y_h(t)| = |A|$, homogénna rovnica teda nie je asymptoticky stabilná, keďže A nie je všeobecne rovné 0. Zároveň je ale homogénna rovnica stabilná, keďže každé jej riešenie je počínajúc časom t_0 ohraničené číslami $(-|A| - |B{\lambda_2}^{t_0}|)$ a $(|A| + |B{\lambda_2}^{t_0}|)$. V Definícii I.27 (i) potom volením dostatočne malého δ dostávame, že $\epsilon > |A| + |B{\lambda_2}^{t_0}|$, teda počínajúc t_0 je podmienka stability splnená.
Keď $|\lambda_1| < 1$, potom $\lim_{t\to+\infty} y_h(t) = 0$, homogénna rovnica (I.5) je asymptoticky stabilná.
Napokon, pokiaľ $|\lambda_1| > 1$, potom $\lim_{t\to+\infty} |y_h(t)|$ diverguje do $+\infty$, homogénna rovnica je teda nestabilná.

V prípade dvojnásobného reálneho koreňa, alebo komplexne združených koreňov χ je dôkaz tvrdenia lemmy obdobný ■

Uvedená lemma nám následne umožňuje vysloviť veľmi užitočné tvrdenie pri posudzovaní asymptotickej stability.

Veta I.30 *(nutné a postačujúce podmienky asymptotickej stability)* *Homogénna rovnica (I.5) je asymptoticky stabilná práve vtedy, keď platia súčasne vzťahy*

$$\chi(1) \equiv 1 + a_1 + a_2 > 0 \tag{I.9}$$

$$\chi(-1) \equiv 1 - a_1 + a_2 > 0 \tag{I.10}$$

$$1 - a_2 > 0 \tag{I.11}$$

Dôkaz

(i) Pokiaľ χ nemá reálne korene, potom prvé dve nerovnosti sú automaticky splnené. Pre modul koreňov $\lambda 1, \lambda 2$ platí: $|\lambda|^2 = \lambda_1.\bar{\lambda_1} = \lambda_1\lambda_2 = a_2$. Z nerovnosti (I.11) potom plynie $|\lambda|^2 < 1$ a teda aj $|\lambda| < 1$. Podľa Lemmy I.29 je potom homogénna rovnica (I.5) asymptoticky stabilná.

(ii) Nech λ_1, λ_2 sú reálne korene χ. Nerovnosti (I.9) a (I.10) upravíme na

$$(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$$
$$(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) > 0$$

Z nerovností vyplýva, že $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty, -1)$, alebo $\lambda_1, \lambda_2 \in (-1, 1)$, alebo $\lambda_1, \lambda_2 \in (1, +\infty)$. Podľa Viètovych vzťahov $\lambda_1.\lambda_2 = a_2$. Keďže dľa (I.11) $a_2 < 1$ tak nutne aspoň jeden z koreňov λ_1, λ_2 leží v $(-1, 1)$. To ale zároveň znamená, že oba korene ležia v $(-1, 1)$, podľa Lemmy I.29 je teda homogénna rovnica asymptoticky stabilná. ■

Poznámka
Podobným spôsobom môžeme formulovať aj postačujúce podmienky pre stabilitu, resp. nestabilitu:

(i) Nech prvé dve nerovnosti Vety I.30 sú splnené a navyše platí $1 - a_2 = 0$. Potom rovnica (I.5) je stabilná, ale nie je asymptoticky stabilná.

(ii) Nech prvé dve nerovnosti Vety I.30 sú splnené a navyše platí $1 - a_2 < 0$. Potom rovnica (I.5) je nestabilná.

Dôkaz oboch tvrdení je obdobný dôkazu Vety I.30. V prvom prípade dokážeme, že korene $\chi(\lambda)$ sú komplexne združené, s modulom 1, v druhom prípade ukážeme, že modul oboch koreňov je väčší než 1. Následne ukončíme dôkaz použitím Lemmy I.29.

I.5.2 Monotónnosť riešenia

Monotónnosť riešení homogénnej rovnice opäť závisí na povahe koreňov charakteristického polynómu. Vyslovme pre naše potreby dve tvrdenia, ktoré budú užitočné v neskorších kapitolách.

Tvrdenie I.31
Nech charakteristický polynóm χ nemá reálne korene.
Potom $y_h(t)$ riešenie homogénnej rovnice (I.5) má oscilačný charakter s periódou oscilácie $\frac{2\pi}{\nu}$, kde ν je argument toho koreňa χ, ktorého imaginárna zložka je kladná.

Dôkaz
Všeobecné riešenie možno v prípade komplexných koreňov písať v tvare

$$y(t) = C|\lambda|^t \cos(\nu t + \epsilon), \qquad C \geq 0,\ \epsilon \in< 0\ ,\ 2\pi),\ t \in \mathbb{Z},$$

Odtiaľ je vidieť, že y(t) má oscilačný charakter s amplitúdou $C|\lambda|^t$ a periódou $\frac{2\pi}{\nu}$ ■

Tvrdenie I.32
Nech v rovnici (I.5) platí $a_1 < 0$, $a_2 > 0$ a korene charakteristického polynómu χ sú reálne.
Potom $\exists t_0 \in \mathbb{Z} \quad \forall t \geq t_0$ je každé riešenie $y_h(t)$ rovnice (I.5) monotónne.

Dôkaz
Pre reálne korene λ_1, λ_2 podľa Viètovych vzťahov platí

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -a_1 > 0 \\ \lambda_1.\lambda_2 &= a_2 > 0\ , \end{aligned}$$

teda λ_1 aj λ_2 sú kladné.

Nech $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Podľa Vety I.23 má každé riešenie homogénnej rovnice tvar:

$$y(t) = A\lambda^t + Bt\lambda^t, \qquad A, B \in \mathbb{R},\ \ t \in \mathbb{Z},$$

úpravou čoho dostávame

$$\begin{aligned} y(t+1) - y(t) &= A\lambda^t\lambda - A\lambda^t + B(t+1)\lambda^t\lambda + B\lambda^t \\ \Delta y(t+1) &= \lambda^t \left(A(\lambda - 1) + B\lambda + t(B\lambda - B)\right) \end{aligned}$$

Pre všetky $t \geq [-\frac{A(\lambda-1)+B\lambda}{(B\lambda-B)}]+1$ je potom pravá strana buď neustále kladná, alebo neustále záporná, teda aj $\Delta y(t+1)$ bude vždy kladné, alebo vždy záporné. To ale znamená, že počínajúc časom $t_0 = [-\frac{A(\lambda-1)+B\lambda}{(B\lambda-B)}] + 1$ bude $y(t)$ monotónne.

V prípade $\lambda 1 \neq \lambda 2$ dokážeme tvrdenie obdobným spôsobom. ■

V ostatných prípadoch nie sme schopní formulovať obdobné tvrdenia, monotónnosť riešenia homogénnej rovnice závisí od konkrétneho tvaru riešenia určeného počiatočnými podmienkami

Kapitola II

Model multiplikátoru-akcelerátoru

II.1 Základný model

II.1.1 Popis modelu

Modely multiplikátoru-akcelerátoru patria dnes medzi základné modely makroekonómie. Prvý model tohoto typu navrhol v svojom článku [6] P. A. Samuelson. Je rýdzo makroekonomický, pracuje s agregovanými veličinami celkového produktu (outputu, dôchodku), spotreby domácností, vládnou spotrebou a celkovými investíciami, ktoré predstavujú tú časť produktu, ktorá sa nespotrebúva v bežnom období. Model stavia na keynesiánskych predpokladoch, teda stanovuje, že prispôsobenie na trhu je kvantitatívnej povahy (t.j. zmenou veľkosti produktu; zmeny v úrokových mierách a cenovej hladine nepôsobia ako mechanizmus prispôsobenia, alebo konvergencie k nejakému potenciálu ekonomiky). Realizovaný produkt závisí výlučne na veľkosti celkového dopytu (spotrebného a investičného), nepredpokladá sa obmedzenie zo strany ponuky a výrobných možností. Všetok vyrobený produkt sa tak buď spotrebuje, alebo investuje.

Základný model, ktorý budeme analyzovať a neskôr rozvíjať, popísal v [4] J.R.Hicks.

Model vybudujeme najprv pre dvojsektorovú ekonomiku, vládnu spotrebu ani zahraničný obchod uvažovať nebudeme. Základnou podmienkou rovnováhy na trhu v modeli potom je

$$Y(t) = C(t) + I(t) \tag{II.1}$$

v každom čase t, kde $Y(t)$ je veľkosť produktu, $C(t)$ spotreba domácností a $I(t)$ celkové investície firiem v bežnom období.
Celkovú spotrebu určíme ako konštantný podiel na dôchodku minulého obdobia. Oneskorenie je tu dané úvahou, že domácnosti financujú spotrebu

príjmami z minulého obdobia. Píšeme teda

$$C(t) = c.Y(t-1), \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.2}$$

kde $c \in (0,1)$ je daná konštanta. V ďalšom texte ju budeme nazývať hraničným sklonom k spotrebe (ktorý je zároveň vzhľadom k $Y(t-1)$ aj sklonom priemerným).
Týmto spôsobom zavádzame do modelu Keynesov dôchodkový multiplikátor.
Majme v nejakom čase t_0 $C(t_0) = C_0$ a $I(t) = I_0$ v každom čase t. Potom

$$Y(t_0+t) = cY(t_0+t-1) + I_0 = I_0 + c.I_0 + ... + c^{t-1}I_0 + c^tY(t_0)$$

pre $t \to +\infty$ máme

$$\lim_{t\to+\infty} Y(t_0+t) = \sum_{i=0}^{+\infty} c^i I_0 + \lim_{t\to+\infty} c^t C_0 = \frac{1}{1-c} I_0$$

inými slovami, každý autonómny výdaj, pokiaľ zostane jeho výška zachovaná, zvyšuje v konečnom dôsledku dôchodok $\frac{1}{1-c}$ násobne. Pre koeficient $\frac{1}{1-c}$ sa používa názov keynesiánsky (dôchodkový) multiplikátor.
Investície delíme na 2 zložky - autonómne investície $I_1(t)$ a indukované investície $I_2(t)$:

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.3}$$

O autonómnych investíciách predpokladajme, že sú v čase nemenné.

$$I_1(t) = A_0, \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.4}$$

kde A_0 je kladná reálna konštanta.
Indukované investície sa riadia akcelerátorovým princípom, teda ich veľkosť je priamo úmerná rastu produktu pozorovanom v minulom období

$$I_2(t) = \kappa.\left(Y(t-1) - Y(t-2)\right), \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.5}$$

kde κ je daná konštanta, ktorú nazveme akcelerátorom. Takýto predpoklad možno napr. vysvetľovať statickými očakávaniami firiem ohľadom ďalšieho vývoja dôchodku a z toho plynúcou snahou tvoriť si zásoby.

Predovšetkým určenia (II.2) a (II.5) sú (s menšími obmenami) charakteristické pre všetky modely multiplikátoru-akcelerátoru.
Upozornime na tomto mieste na Keynesiánsky rámec modelu: spôsob prispôsobenia na trhu je čisto kvantitatívny, keďže úroková miera ani cenová hladina nikde v rovniciach (II.2) - (II.5) nevystupujú. Nevyskytuje sa tu ani prirodzená hladina produktu, keďže nejestvujú mechanizmy, ktoré by k nemu

realizovaný produkt približovali.

Dosadením (II.2) – (II.5) do (II.1) vychádza

$$Y(t) = c.Y(t-1) + A_0 + \kappa.(Y(t-1) - Y(t-2)) \qquad \text{(II.6)}$$

úpravou dostávame

$$Y(t) - (c+\kappa)Y(t-1) + \kappa Y(t-2) = A_0, \qquad t \in \mathbb{Z} \qquad \text{(II.7)}$$

Táto rovnica zhŕňa celý model, pričom určením $Y(t)$ na jej základe (a na základe znalostí počiatočných podmienok) sme schopní pomocou (II.1)-(II.4) presne určiť vývoj jeho jednotlivých agregátov.

II.1.2 Analýza modelu

Pomocou nástrojov vybudovaných v 1. kapitole sa pokúsme kvantitatívne a následne kvalitatívne analyzovať tento model.
Homogénnou rovnicou k (II.7) je

$$Y(t) - (c+\kappa)Y(t-1) + \kappa Y(t-2) = 0, \qquad t \in \mathbb{Z} \qquad \text{(II.8)}$$

Charakteristický polynóm má potom tvar

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - (c+\kappa)\lambda + \kappa \qquad \text{(II.9)}$$

Povahu koreňov polynómu χ zistíme pomocou diskriminantu $D(\chi) = (c+\kappa)^2 - 4\kappa$. Komplexne združené korene dostávame ak $D(\chi) < 0$. úpravami tejto nerovnosti dostávame

$$\begin{aligned} D(\chi) &< 0 \\ (c+\kappa)^2 - 4\kappa &< 0 \\ \kappa^2 - (4-2c)\kappa + c^2 &< 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.10)}$$

Teda korene λ_1, λ_2 charakteristického polynómu sú komplexné, práve keď $\kappa \in (2 - c - 2\sqrt{1-c}\,,\ 2 - c + 2\sqrt{1-c})$. Použitím Vety I.23 dostávame, že riešenie homogénnej rovnice má tvar

$$Y_h(t) = B_1\sqrt{\kappa}^{\,t}\cos\left(t.\arccos\frac{c+\kappa}{2\sqrt{\kappa}}\right) + B_2\sqrt{\kappa}^{\,t}\sin\left(t.\arccos\frac{c+\kappa}{2\sqrt{\kappa}}\right) \qquad \text{(II.11)}$$

Pokiaľ $\kappa \in \left\{2 - c - 2\sqrt{1-c}\,,\ 2 - c + 2\sqrt{1-c}\right\}$, potom dostávame dvojnásobný reálny koreň. Opäť dľa Vety I.23 dostávame, že riešenie homogénnej rovnice má tvar

$$Y_h(t) = B_1\left(\frac{c+\kappa}{2}\right)^t + B_2 t\left(\frac{c+\kappa}{2}\right)^t \qquad \text{(II.12)}$$

Napokon, ak κ nepatrí ani do jednej z uvedených množín, sú korene λ_1, λ_2 reálne a navzájom rôzne; platí

$$Y_h(t) = B_1 \left(\frac{c+\kappa+\sqrt{(c+\kappa)^2-4\kappa}}{2} \right)^t + B_2 \left(\frac{c+\kappa-\sqrt{(c+\kappa)^2-4\kappa}}{2} \right)^t \tag{II.13}$$

Partikulárne riešenie rovnice (II.7) môžeme nájsť v tvare

$$Y_p(t) = \frac{A_0}{1-c}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.14}$$

Celkové riešenie má potom tvar

$$Y(t) = Y_h(t) + Y_p(t)\,, \tag{II.15}$$

kde za $Y_h(t)$ dosadíme príslušnú z rovníc (II.11)-(II.13).

Konkrétny priebeh vývoja produktu v čase potom získame určením počiatočných podmienok $Y(0) = Y_0$, $Y(1) = Y_1$ a vyrátaním príslušných B_1, B_2

Pokiaľ chceme posúdiť vlastnosti nášho modelu bez nutnosti zisťovať presný tvar riešenia, stačí sa nám zamerať na homogénnu rovnicu (partikulárne riešenie je v našom prípade pomerne jednoduché) a použiť výsledky kvalitatívnej analýzy rovníc z prvej kapitoly.

Prvou, veľmi významnou vlastnosťou je stabilita (určená v Definícii I.27). Pripomeňme si na tomto mieste, že sa jedná o chovanie celkového riešenia, pokiaľ sa jeho hodnota v nejakom čase zmení. Pokiaľ rozdiel pozmeneného a originálneho riešenia v každom čase konverguje pre $t \to +\infty$ k nule, potom hovoríme, že je homogénna rovnica je asymptoticky stabilná. Pokiaľ je rozdiel oboch riešení aspoň ohraničený, potom hovoríme, že homogénna rovnica je stabilná. Nakoniec, keď tento rozdiel diverguje, homogénna rovnica je nestabilná. Prítomnosť nestability v modeli teda znamená, že v prípade vychýlenia zo stavu dlhodobej rovnováhy sa od nej systém čoraz viac vzdaľuje

Posúďme teda stabilitu pomocou Vety I.30. Prvé dve nerovnosti $\chi(1) > 0$ a $\chi(-1) > 0$, ktoré je potreba overiť, platia vždy. Podľa Vety I.30 je teda podmienkou asymptotickej stability splnenie nerovnosti

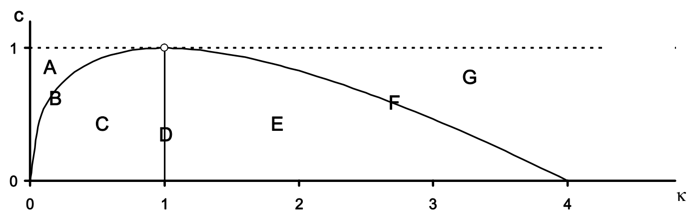
$$\kappa < 1 \tag{II.16}$$

Pokiaľ je táto podmienka splnená, potom pre $t \to +\infty$ konverguje každé riešenie $Y(t)$ ku $Y_p(t) = \frac{A_0}{1-c}$. Pokiaľ je (II.16) splnená s opačným znamienkom, potom dochádza pri opustení konštantného riešenia Y_p k čoraz väčším odchýlkam od tohoto riešenia, čo znamená, že sa eventuálne dostávame mimo oblasť platnosti modelu. Tomuto problému sa budeme ešte nižšie v texte venovať.

Analýzu monotónnosti riešenia rozdelíme na 2 časti - najprv určíme povahu koreňov $\chi(\lambda)$, potom sa môžeme pokúsiť o presnejšie určenie chovania podľa tvrdení z 1. kapitoly.
Prvú časť sme už vyriešili v kvantitatívnej analýze: korene sú komplexné, pokiaľ $\kappa \in (2-c-2\sqrt{1-c}\,,\, 2-c+2\sqrt{1-c})$ a reálne, pokiaľ $\kappa \notin (2-c-2\sqrt{1-c}\,,\, 2-c+2\sqrt{1-c})$.
Podľa Tvrdenia I.31 je v prvom prípade $Y_h(t)$ oscilujúce - dochádza teda k cyklickému vývoju produktu v čase, kedy obdobia expanzie produktu sa striedajú s obdobiami recesie. Amplitúda cyklu s časom klesá práve vtedy, keď je nulové riešenie homogénnej rovnice asymptoticky stabilné, dĺžka cyklu (t.j. periódy oscilácie) závisí na konkrétnych hodnotách c a κ, pričom v čase nedochádza k jej zmenám.

V prípade reálnych koreňov umožňuje tvar rovnice (II.7) použiť Tvrdenie I.32, teda od určitého času t_0 je $Y_h(t)$ monotónne. V tomto prípade potom k hospodárskym cyklom nedochádza.

Výsledky kvalitatívnej analýzy možno zhrnúť do nasledovného grafu:



Možno vysloviť nasledujúce tvrdenia:
$[\kappa, c] \in A \cup B \Rightarrow$ homogénna rovnica (II.8) je asymptoticky stabilná, každé jej riešenie od určitého t_0 monotónne
$[\kappa, c] \in C \Rightarrow$ rovnica (II.8) je asymptoticky stabilná, jej riešenia oscilačné (s klesajúcou amplitúdou a konštantnou periódou)
$[\kappa, c] \in D \Rightarrow$ rovnica (II.8) je stabilná, jej riešenia oscilačné (s konštantnou amplitúdou aj periódou)
$[\kappa, c] \in E \Rightarrow$ rovnica (II.8) je nestabilná, jej riešenia oscilačné (s rastúcou amplitúdou a konštantnou periódou)
$[\kappa, c] \in F \cup G \Rightarrow$ rovnica (II.8) je nestabilná, každé jej riešenie je od určitého t_0 monotónne

II.1.3 Zavedenie rastúceho trendu vo vývoji produktu

Vráťme sa ešte na chvíľu k partikulárnemu riešeniu. Jeho hodnota je $Y_p(t) = \frac{A_0}{1-c}$. Ako z kvalitatívnej analýzy vyplýva, veľkosť takto určeného produktu $Y_p(t)$ predstavuje - za predpokladu asymptotickej stability - bod, ku ktorému ekonomika konverguje. Všimnime si, že v práve v tomto tvare sa prejavuje dôchodkový multiplikátor $\frac{1}{1-c}$, ktorý určuje, ako v dlhom období závisí výkonnosť ekonomiky od veľkosti autonómnych výdavkov. Model je teda keynesiánsky aj v tom duchu, že vlády môžu svojimi autonómnymi výdavkami významne a pozitívne ovplyvniť output ekonomiky. Túto možnosť budeme v texte rozvíjať neskoršie.

Taktiež prostredníctvom tejto úvahy prichádzame k jednoduchej možnosti, ako zaviesť dlhodobý rastúci trend, ktorý by stabilný výstup sledoval. Zaveďme autonómne investície ako funkciu, ktorá rastie v čase s konštantnou mierou rastu g.

$$I_1(t) = A_0(1+g)^t, \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.17}$$

kde $g \in (0\,,\,+\infty)$ je daná konštanta.
Partikulárne riešenie určíme pomocou Vety I.24 ako

$$Y_p(t) = \frac{A_0(1+g)^{2+t}}{\chi(1+g)}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.18}$$

pokiaľ $(1+g)$ nie je koreňom χ, resp.

$$Y_p(t) = \frac{A_0 t(1+g)^{2+t}}{(c+\kappa)(1+g)-2\kappa}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.19}$$

pokiaľ $(1+g)$ je jednoduchým koreňom χ, poprípade

$$Y_p(t) = \frac{A_0 t^2(1+g)^{2+t}}{4\kappa-(c+\kappa)(1+g)}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.20}$$

pokiaľ $(1+g)$ je dvojnásobným koreňom χ
Celkové riešenie dostávame opäť podľa vzťahu (II.15).
Všetky partikulárne riešenia z rovníc (II.18), (II.19), (II.20) sú samozrejme rastúce. V prípade stability homogénnej rovnice teda budú všetky riešenia sledovať rastúci trend udaný $Y_p(t)$.

Rovnosť (II.17) nemusí dávať na prvý pohľad zmysel. Pokiaľ ale upustíme od predpokladu, že jediné autonómne výdavky sú investičné a pripustíme aj autonómne spotrebné výdavky domácností ako výdavky nezávislé na momentálnom dôchodku, tak je možné vysvetliť rast autonómnej spotreby zvyšovaním reálneho disponibilného príjmu vďaka zväčšovaniu kapitálovej vybavenosti práce (a teda jej vyššou produktivitou) ako aj technickými inováciami plynúcich z predchádzajúcich investíc.

II.2 Problém stability základného modelu

II.2.1 Stabilita relatívnej odchýlky

Jedným z problémových miest základného modelu, ako vyplynulo z jeho analýzy, je, že homogénna rovnica (II.8) nie je všeobecne stabilná. Vzťah (II.16) ukazuje, že kritickým bodom je veľkosť akcelerátoru κ - pokiaľ je väčší ako 1, dochádza vo vývoji outputu k čoraz väčším odchýlkam od rovnovážnej hodnoty Y_p. Pritom sa nezdá, že by existovala ekonomická nutnosť toho, aby akcelerátor bol nižší než 1.

Jednou z možností, ako problém rastúcich odchýliek čiastočne potlačiť je zavedenie rastúceho Y_p. Jednoduchá úvaha nás vedie k možnosti, že zatiaľ čo absolútna odchýlka od rovnovážneho stavu Y_p môže rásť, relatívna odchýlka, definovaná ako $R(t) = \frac{Y(t)-Y_p(t)}{Y_p(t)}$ je v prípade rastúceho trendu vhodnejšou charakteristikou riešenia. Nech teda $I_1(t) = A_0(1+g)^t$, za predpokladu[1] $\chi(1+g) > 0$ máme

$$R(t) = \frac{Y_h(t)}{Y_p(0).(1+g)^t}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.21}$$

Keďže chceme zistiť časový vývoj tejto veličiny, upravujme homogénnu rovnicu základného modelu (II.8) na

$$\frac{1}{Y_p(0).(1+g)^t}\left(Y(t) - (c+\kappa)Y(t-1) + \kappa Y(t-2)\right) = 0 \tag{II.22}$$

$$R(t) - \frac{c+\kappa}{1+g}R(t-1) + \frac{\kappa}{(1+g)^2}R(t-2) = 0 \tag{II.23}$$

Homogénna rovnica (II.23) nám udáva hľadaný predpis, podľa ktorého možno vyšetriť stabilitu pre $\{R(t)\}$. Dľa Vety I.30 dostávame podmienky asymptotickej stability

$$\chi_R(1) > 0 \tag{II.24}$$

$$\chi_R(-1) > 0 \tag{II.25}$$

$$1 - \frac{\kappa}{(1+g)^2} > 0 \tag{II.26}$$

Prvá nerovnosť je splnená, pokiaľ $\kappa < 1 + (1-c) + \frac{1-c+g^2}{g}$. Priamočiarym výpočtom sa možno presvedčiť, že druhá nerovnosť je splnená vždy. Vzťah

[1] Pokiaľ tento predpoklad nie je splnený, potom musíme namiesto nasledujúcej rovnice použiť iný tvar pre $R(t)$, tak ako je možné ho odvodiť z (II.19), resp. (II.20). Obdobnými úpravami, tak ako sú ďalej v texte, sa namiesto(II.23) dostávame k diferenčnej rovnici, ktorej koeficienty nie sú konštantné. Analýza takejto rovnice ale presahuje rámec tohoto textu

(II.26) je splnený pre $\kappa < (1+g)^2$.

Teda pre $\kappa \in (0,1)$ je $Y_h(t)$ (t.j. absolútna odchýlka $Y(t)$ od $Y_p(t)$) asymptoticky stabilná, pre $\kappa \in \left(0\,,\,\min\{(1+g)^2\,,\,1+(1-c)+\frac{1-c+g^2}{g}\}\right)$ je aspoň relatívna odchýlka $Y(t)$ od $Y_p(t)$ asymptoticky stabilná.
Pre $\kappa > (1+g)^2$ je už ale aj relatívna odchýlka $R(t)$ nestabilná.

II.2.2 Samuelsonov model multiplikátoru-akcelerátoru

Iná možnosť ako zamedziť nestabilite v modeli sa ukazuje v modifikácii základného modelu multiplikátoru-akcelerátoru (v skutočnosti sa jedná o úplne prvý model multiplikátoru-akcelerátoru, navrhnutý v r.1939 P. A. Samuelsonom v [6]). Upravme predpoklad tvorby indukovaných investícií zo (II.5) na

$$I_2(t) = \kappa\,(C(t-1) - C(t-2))\,, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.27}$$

Teda tvorba $I_2(t)$ sa obmedzí iba na pozorovanú zmenu spotreby v minulom období, namiesto toho, aby brala do úvahy celkové $(Y(t-1) - Y(t-2))$. dosadením (II.2), (II.3), (II.4), (II.27) do (II.1) prichádzame k rovnici

$$Y(t) - c(\kappa+1)Y(t-1) + c\kappa Y(t-2) = A_0, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.28}$$

Potom charakteristický polynóm má tvar

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - c(\kappa+1)\lambda + c\kappa \tag{II.29}$$

ľahko sa môžeme presvedčiť (pomocou Vety I.24), že partikulárne riešenia základného a Samuelsonovho modelu sa nelíšia, obe sú určené vzťahom

$$Y_p(t) = \frac{A_0}{1-c}$$

Na vyšetrenie stability opäť použijeme Vetu I.30; dostávame

$$\begin{aligned} \chi(1) &> 0 \\ \chi(-1) &> 0 \\ c.\kappa &< 1 \end{aligned} \tag{II.30}$$

Prvé dve nerovnosti sú vždy splnené (ako sa môžeme prevsvedčiť priamym dosadením). Ako predtým, tak aj teraz je posledná nerovnosť podmienkou stability. Homogénna rovnica je asymptoticky stabilná, pokiaľ $\kappa \in (0\,,\,\frac{1}{c})$, podľa poznámky k Vete I.30 nestabilná, ak $\kappa > \frac{1}{c}$.
Vzhľadom na to, že $\frac{1}{c} > 1$, je podmienka stability (II.30) voľnejšia ako podmienka (II.16) pre základný model. Toto je v podstate zjavné už z rovnice (II.27), v ktorej je na mieste pôvodnej veľkosti akcelerátoru κ dosadené $c.\kappa$ a

preto je možné zvýšiť hodnotu κ nad 1 bez nutnosti straty stability v modeli.

Pokiaľ by sme chceli zistiť aj monotónnosť riešení, zistíme povahu koreňov $\chi(\lambda)$. Tie sú komplexné práve vtedy, keď

$$\begin{aligned} D(\kappa) &< 0 \\ c^2(\kappa+1)^2 - 4c\kappa &< 0 \\ c &\in \left(0\,,\ \frac{4\kappa}{(\kappa+1)^2}\right) \end{aligned}$$

Pokiaľ sú potom korene komplexné, tak podľa Tvrdenia I.31 je Y_h oscilujúce, dochádza tak k hospodárskym cyklom čase. Ak naopak $c > \frac{4\kappa}{(\kappa+1)^2}$, možno použiť Tvrdenie I.32 a Y_h je od určitého t_0 monotónne.

Chovanie Samuelsonovho modelu je teda veľmi podobné chovaniu základného modelu. Výhodou je vyššia stabilita modelu. Na druhú stranu, musíme prijať hypotézu tvorby indukovaných investícií iba na základe zmien spotreby, ako je určené v (II.27). Inými slovami, predpokladáme,že zmeny v investičnom dopyte neindukujú ďalšie zmeny investícií podľa princípu akcelerátora, čo sa zdá byť problematickejší predpoklad oproti (II.5) zo základného modelu.

II.3 Vplyv daní v modeli

Na najbližších riadkoch pozmeníme model jednoduchým zavedením daní a budeme skúmať, ako táto zmena ovplyvní charakteristiku vývoja produktu v čase.

II.3.1 Prípad nemennej výšky vládneho rozpočtu

Rozšírme doteraz uvažovaný dvojsektorový model o spotrebu vlády nahradením (II.1) za

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t), \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.31}$$

kde $G(t)$ predstavuje výdavky vlády v čase t. Zatiaľ o týchto predpokladajme, že sú nemenné v čase, teda

$$G(t) = \bar{G}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.32}$$

Príjmy vlády budú tvoriť dane. Zdanená bude všetká mimovládna spotreba investičných ako aj spotrebných statkov jednotnou daňovou sadzbou

τ.[2] Veľkosti $C(t)$ a $I(t)$ budú takto znížené na

$$C(t) = (1-\tau)cY(t-1) \tag{II.33}$$
$$I_1(t) = (1-\tau)A_0 \tag{II.34}$$
$$I_2(t) = (1-\tau)\kappa\left(Y(t-1) - Y(t-2)\right) \tag{II.35}$$

Výsledný produkt je nakoniec určený rovnicou

$$Y(t) - (1-\tau)(c+\kappa)Y(t-1) + (1-\tau)\kappa Y(t-2) = (1-\tau)A_0 + \bar{G} \tag{II.36}$$

Kvantitatívnu analýzu rovnice (II.36) obmedzíme na určenie partikulárneho riešenia, vzťah ostatných riešení k tomuto určíme kvalitatívnou analýzou homogénnej rovnice k (II.36).
Podľa Vety I.24 existuje riešenie (II.36) v tvare

$$Y_p(t) = \frac{(1-\tau)A_0 + \bar{G}}{1-(1-\tau)c} \tag{II.37}$$

Z tvaru (II.37) je zrejmé, že hodnota rovnovážneho produktu sa bude zvyšovať s rastom $\bar{G}$ a znižovať s rastom daňového zaťaženia reprezentovaného konštan- tou τ.

Charakteristický polynóm homogénnej rovnice k (II.37) má tvar

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - (1-\tau)(c+\kappa)\lambda + (1-\tau)\kappa \tag{II.38}$$

Komplexné korene $\chi(\lambda)$ vyjdú vtedy, keď $D(\chi)$ je záporné. Upravujme:

$$\begin{aligned}(1-\tau)^2(\kappa+c)^2 - 4(1-\tau)\kappa &< 0\\ (1-\tau)(\kappa+c)^2 - 4\kappa &< 0\end{aligned} \tag{II.39}$$

Pripomeňme, že v základnom modeli má podmienka komplexnosti koreňov tvar

$$(c+\kappa)^2 - 4\kappa < 0$$

Keďže $(1-\tau < 1)$, je zjavné, že množina všetkých $[c,\kappa]$, pre ktoré má $\chi(\lambda)$ (z rovnice (II.38)) komplexné korene je nadmnožinou obdobnej množiny v základnom modeli. V kombinácii s Tvrdením I.31 dostávame, že oscilačných (cyklických) riešení bude viac, než v prípade základného modelu. Prítomnosť

[2] Tento spôsob zdaňovania volíme predovšetkým pre jeho jednoduchosť v rámci modelu. Predpoklad čisto spotrebných daní môže byť napadnutý argumentom, že v dnešných ekonomikách je väčšina daňového zaťaženia vo forme dane z príjmu. Za predpokladu jednotnej dane z príjmu môžu byť ale dôsledky pre modelovanie rovnaké. Zavedením dane z príjmu postihujeme priamo spotrebu domácností $C(t)$ znížením ich disponibilného dôchodku. Avšak toto zníženie by bolo kompenzované (domácnosťami vynúteným) zvýšením miezd a kapitálovej renty, čo by zas znižovalo objem prostriedkov firiem určených na investície. Pokiaľ by toto prerozdelenie výdavkov vo firmách bolo proporcionálne k daňovej záťaži, dochádzame k rovnakému výslednému stavu, ako v prípade výlučne spotrebných daní.

hospodárskych cyklov je po zavedení daní častejšia, než v základnom modeli multiplikátoru-akcelerátoru.

Stabilitu posúdime podľa Vety I.30. Podmienky asymptotickej stability majú tvar

$$\begin{aligned} \chi(1) &> 0 \\ \chi(-1) &> 0 \\ (1-\tau)\kappa &< 1 \end{aligned}$$

Prvé dve nerovnosti sú vždy splnené, nutná a postačujúca podmienka asymptotickej stability je vyjadrená poslednou nerovnosťou. Vzhľadom na to, že $(1-\tau) \in (0,1)$, je model stabilnejší ako základný model - daň je teda stabilizujúcim prvkom v modeli.

II.3.2 Prípad vyrovnaného vládneho rozpočtu

Podmienka (II.32) stanovuje, že vládna spotreba je v čase konštantná. Pokiaľ bude jej výška vhodne nastavená, môžeme dostať dlhodobo vyrovnaný rozpočet. Ak budeme ale nástojiť na tom, aby rozpočet bol neustále vyrovnaný, musíme nahradiť (II.32) vzťahom

$$G(t) = \tau c Y(t-1) + \tau\kappa(Y(t-1) - Y(t-2)) + \tau A_0, \quad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.40}$$

kde na pravej strane sú vyjadrené daňové výnosy v čase t. Po dosadení (II.40) do (II.31) dostávame

$$\begin{aligned} &Y(t) - (1-\tau)(c+\kappa)Y(t-1) + (1-\tau)\kappa Y(t-2) = \\ &\qquad = (1-\tau)A_0 + \tau c Y(t-1) + \tau\kappa(Y(t-1) - Y(t-2)) + \tau A_0 \end{aligned} \tag{II.41}$$

upravením čoho sa dostávame k

$$Y(t) - (c+\kappa)Y(t-1) + \kappa Y(t-2) = A_0, \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.42}$$

teda k rovnici základného modelu (II.7).
Podmienka neustále vyrovnaného rozpočtu ruší možnosť vlády vplývať na dosahovanú úroveň produktu[3].

[3] V literatúre sa pri preberaní statického modelu "dôchodok-výdaje" poukazuje, že multiplikátor vyrovnaného vládneho rozpočtu je rovný 1. Takýto výsledok dostávame iba za predpokladu, že dane nevplývajú na autonómne výdavky subjektov (investičné, či spotrebné)
V našom zavedení daní sme toto nepredpokladali, preto politika vyrovnaného rozpočtu nemá vplyv na dosahovaný produkt. Pokiaľ by sme naopak uvažovali $I_1 = A_0$ nezávisle na τ, tak by sme na tomto mieste taktiež dospeli k tvrdeniu, že zvýšenie výdavkov vlády o 1 jednotku, plne kryté zvýšením daní, zvýši výsledný rovnovážny produkt o 1 jednotku

Pokiaľ upustíme od politiky vyrovnaného rozpočtu, môžeme dôjsť k otázke, nakoľko dokáže vláda priamo svojou spotrebou určovať output ekonomiky, t.j. diskutovať možnosti fiškálnej politiky. Na tomto mieste sa ešte touto problematikou zaoberať nebudeme, ale vrátime sa k nej v podkapitole II.5. Predtým si ale upravíme model o vplyv úrokovej miery a trhu peňazí, čo nám umožní posúdiť neskôr fiškálnu aj monetárnu politiku štátu zároveň.

II.4 Rozšírenie o vplyv peňazí a úrokovej miery

II.4.1 Indukované investície ako funkcia úrokovej miery v minulosti

Vo všetkých doteraz uvádzaných modeloch sme neuvažovali o vplyve úrokových mier na veľkosť investícií ani sme neuvažovali peňažný trh. Aby sme tak urobili, pozmeňme najprv veľkosť indukovaných investícií na

$$I_2(t) = \kappa.\,(Y(t-1) - Y(t-2)) - b.i(t-1), \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.43}$$

kde $b \in (0, +\infty)$ je daná konštanta. Týmto spôsobom zavádzame do modelu novú premennú $i(t)$, ktorá predstavuje reálnu úrokovú mieru v čase t. Veľkosť úrokovej miery určíme podľa teórie preferencie likvidity. Dopyt po likvidite je určený ako

$$L^D(t) = k.Y(t) - h.i(t)\,, \tag{II.44}$$

kde $k, h \in (0, +\infty)$ sú dané kladné konštanty. Ponuka likvidity je určená objemom reálnych zostatkov $\frac{M}{P}$ (M predstavuje nominálny objem peňazí, P potom cenovú hladinu; jedná sa teda o istý druh indexu objemu likvidných aktív), ktorý budeme v tejto kapitole považovať za nemenný.

$$L^S(t) = \frac{M}{P}(t) \tag{II.45}$$

$$\frac{M}{P} = \bar{M} \tag{II.46}$$

Rovnováha na peňažnom trhu (trhu s likviditou) je potom daná ako

$$L^D(t) = L^S(t) \tag{II.47}$$

odkiaľ možno po dosadení určiť úrokovú mieru ako

$$i(t) = \frac{k}{h}Y(t) - \frac{1}{h}\bar{M}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.48}$$

Dosadením (II.48), (II.43) a (II.2), (II.3), (II.4) do (II.1) dostávame rovnicu zhŕňajúcu model pre $Y(t)$ (Pokiaľ by sme chceli zistiť $i(t)$, možno tak urobiť pomocou (II.48)):

$$Y(t) - (c + \kappa - \frac{bk}{h})Y(t-1) + \kappa Y(t-2) = A_0 + \frac{b}{h}\bar{M} \tag{II.49}$$

Pozrime si vlastnosti tohto modelu:
Partikulárne riešenie nachádzame v tvare

$$Y_p(t) = \frac{A_0 + \frac{b}{h}\bar{M}}{\chi(1)}$$

$$Y_p(t) = \frac{1}{1 - c + \frac{bk}{h}}\left(A_0 + \frac{b}{h}\bar{M}\right), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.50}$$

Namiesto $\dfrac{1}{1 - c + \frac{bk}{h}}$ píšeme obvykle γ a hovoríme o ňom ako o tzv. multiplikátore fiškálnej politiky[4]. Súčin $\gamma\frac{b}{h}$ nazývame potom multiplikátorom menovej politiky. O ich význame budeme hovoriť podrobnejšie až v nasledujúcej podkapitole. Partikulárne riešenie môžeme potom písať v jednoduchšom tvare

$$Y_p(t) = \gamma A_0 + \gamma\frac{b}{h}\bar{M}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.51}$$

V kvalitatívnej analýze určíme najprv charakter koreňov polynómu $\chi(\lambda) = \lambda^2 - (c + \kappa - \frac{bk}{h})\lambda + \kappa$

$$D(\chi) = \left(c + \kappa - \frac{bk}{h}\right)^2 - 4\kappa^2 \tag{II.52}$$

Pre nízke hodnoty kladnej konštanty $\frac{bk}{h}$ vychádza diskriminant v novom modeli nižší než diskriminant základného modelu, komplexné korene χ sú v novej modifikácii modelu častejšie.

Výrazná zmena v hodnote reálnych koreňov (oproti základnému modelu) a teda aj celkového chovania modelu nastáva, pokiaľ $\frac{bk}{h} > (c + \kappa)$. Vtedy sa koeficient pri $Y(t-1)$ mení zo záporného na kladný. Z Viètovych vzťahov vyplýva, že prípadné reálne korene sú vtedy záporné. Z toho plynie, že prispôsobenie sa partikulárnemu riešeniu (resp. divergencia od neho) nie je monotónna, ani nutne oscilačné. Riešenie homogénnej rovnice má všeobecne tvar súčtu dvoch postupností, každá z nich má oscilačný charakter s periódou 2. Keďže takéto chovanie v realite nezvykneme pozorovať, predstavuje možnosť takéhoto výsledku istú slabinu modifikácie modelu.

[4] V niektorých monografiách je γ definované ako $\dfrac{\alpha}{1 + \frac{\alpha bk}{h}}$, čo v našom prípade predstavuje iba inú formu zápisu

Podmienky asymptotickej stability majú tvar

$$\chi(1) > 0 \tag{II.53}$$

$$\chi(-1) > 0 \tag{II.54}$$

$$\kappa < 1 \tag{II.55}$$

pričom (II.53) je splnená vždy, (II.55) je totožná s podmienkou stability (II.16) v základnom modeli. Nerovnosť (II.54) sa dá zapísať ako

$$\chi(-1) = 1 + c + 2\kappa - \frac{bk}{h} > 0 \tag{II.56}$$

Táto pre veľké hodnoty $\frac{bk}{h}$ samozrejme nie je splnená. Nastáva teda aj možné zhoršenie stability modelu.

II.4.2 Indukované investície ako funkcia súčasnej úrokovej miery

Vzhľadom na problémy, ktoré sa vyskytujú v práve uvedenej modifikácii základného modelu skúsme modifikovať základný model mierne odlišným spôsobom, a síce zmeniť rovnicu (II.43) pre tvorbu indukovaných investícii na

$$I_2(t) = \kappa.\,(Y(t-1) - Y(t-2)) - b.i(t), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.57}$$

Inými slovami, rozhodovanie firiem o investíciách závisí na aktuálnych úrokových mierach.

Týmto v modeli upúšťame od podmienky čisto kvantitatívneho prispôso -benia sa na trhu a pripúšťame aj iný mechanizmus, konkrétne pohybom úrokových mier. Ilustrovať si to môžeme dosadením (II.2), (II.3), (II.4) a (II.57) do (II.1):

$$Y(t) = cY(t-1) + A_0 + \kappa(Y(t-1) - Y(t-2)) - bi(t)\,, \tag{II.58}$$

kde iba prvé tri sčítance na pravej strane sú v t nemenné.

Model možno vyjadriť rovnicou

$$Y(t) - \frac{c+\kappa}{1+\frac{bk}{h}}Y(t-1) + \frac{\kappa}{1+\frac{bk}{h}}Y(t-2) = A_0 + \frac{b}{h}\bar{M}, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.59}$$

ktorú dostaneme dosadením vzorca pre výpočet úrokovej miery (II.48) do (II.58)

Pozrime sa, aké má zmena modelu dopady na správanie sa riešenia homogénnej rovnice. Charakteristický polynóm homogénnej rovnice k (II.59) má tvar

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{c+\kappa}{1+\frac{bk}{h}}\lambda + \frac{\kappa}{1+\frac{bk}{h}} \tag{II.60}$$

Diskriminant charakteristického polynómu χ je

$$D(\chi) = \frac{(c+\kappa)^2}{(1+\frac{bk}{h})^2} - 4\frac{\kappa}{1+\frac{bk}{h}} = \frac{\kappa^2 - (4(\frac{bk}{h}+1) - 2c)\kappa + c^2}{\frac{bk}{h}+1} \tag{II.61}$$

Komplexné korene má χ vtedy, keď

$$\begin{aligned} \kappa &> 2(\frac{bk}{h}+1) - c - 2(\frac{bk}{h}+1)\sqrt{1 - \frac{c}{\frac{bk}{h}+1}} \\ \kappa &< 2(\frac{bk}{h}+1) - c + 2(\frac{bk}{h}+1)\sqrt{1 - \frac{c}{\frac{bk}{h}+1}} \end{aligned} \tag{II.62}$$

Ak obe platia, podľa Tvrdenia I.31 je riešenie oscilačné.
Ak κ do uvedené nerovnosti nespĺňa, možno (na rozdiel od predošlej modifikácie) použiť Tvrdenie I.32 , riešenie homogénnej rovnice bude od istého t_0 monotónne.
V porovnaní so základným modelom je množina všetkých $[c, \kappa]$, pre ktoré má $\chi(\lambda)$ modifikovaného modelu komplexné korene nadmnožinou obdobnej množiny v základnom modeli (určenej rovnicou (II.10)). V kombinácii s Tvrdením I.31 dostávame, že cyklické riešenia budú častejšie, než v prípade základného modelu.

Podľa Vety I.30 majú podmienky asymptotickej stability tvar

$$\begin{aligned} \chi(1) &< 0 \\ \chi(-1) &< 0 \\ \frac{\kappa}{1+\frac{bh}{h}} &< 1 \end{aligned}$$

Dosadením sa možno presvedčiť, že prvé dve nerovnosti sú splnené, posledná sa dá upraviť na

$$\kappa < 1 + \frac{bk}{h} \tag{II.63}$$

Porovnaním s podmienkou stability základného modelu (II.16) vychádza, že momentálna modifikácia je od neho stabilnejšia (a teda aj stabilnejšia než predošlá modifikácia, kde investície reagujú na iba úrokovú mieru v čase $t-1$).

Ukážme si ešte partikulárne riešenie. Nájdeme ho ako konštantu, jeho hodnota je

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= \frac{A_0 + \frac{b}{h}\bar{M}}{1+\frac{bk}{h}+c}, \qquad t \in \mathbb{Z} \\ Y_p(t) &= \gamma A_0 + \gamma\frac{b}{h}\bar{M}, \qquad t \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{II.64}$$

Teda partikulárne riešenie je rovnaké ako v predošlej modifikácii modelu.

II.4.3 Interpretácia konštanty $\frac{bk}{h}$

Zastavme sa ešte pri konštante $\frac{bk}{h}$. Vieme, že b je citlivosť investícii na úrokovú mieru, h citlivosť dopytu po peniazoch (likvidite) na úrokovú mieru a k je citlivosť dopytu po peniazoch na celkový dôchodok. Pokiaľ vzrastie z nejakej príčiny output, zvyšuje sa aj dopyt po peniazoch. Keďže ich objem je fixný, automaticky sa to dľa (II.48) premieta do vyšších úrokových mier. To napokon znamená zníženie investícií.

Koeficient $\frac{bk}{h}$ nám potom udáva, aký objem investícií je vytlačený zvýšením Y o 1 . V modeloch pôsobí tento koeficient proti rastu $Y(t)$, v prípade prvého modelu v tejto podkapitole sa $Y(t)$ znižuje s rastom $Y(t-1)$ (teda rast produktu v minulom období vytláča súčasné investície). V druhom modeli udáva, nakoľko vytláča rast produktu investície - teda pôsobí ako prispôsobovací mechanizmus rovnováhy na trhoch.

II.5 Vplyv hospodárskej politiky

II.5.1 Vybudovanie modelu pre analýzu hospodárskych politík

Posledný uvažovaný model zhrnutý v rovnici (II.59) poskytuje vhodné východisko k analýze vplyvu fiškálnej a monetárnej politiky na dosahovaný produkt. Mierne si poupravme model pre naše potreby. Obdobne, ako v podkapitole o vplyve zdanenia, zaveďme modifikáciou rovnice (II.1) vládnu spotrebu

$$Y(t) = C(t) + I(t) + G(t), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.65}$$

Taktiež uvoľnime predpoklad (II.46) o konštantnom objeme reálnych zostatkov. Výsledný model dostaneme dosadením rovníc (II.2), (II.3), (II.4), (II.57) a obdobou rovnice (II.48) do (II.65) a má tvar

$$(1 + \frac{bk}{h})Y(t) - (c + \kappa)Y(t-1) + \kappa Y(t-2) = A_0 + G(t) + \frac{b}{h}\frac{M}{P}(t) \tag{II.66}$$

Na pravej strane vystupuje vládna spotreba $G(t)$, prostredníctvom ktorej vykonáva vláda fiškálnu politiku a objem reálnych zostatkov $\frac{M}{P}$. Predpokladajme v celej podkapitole nemennú cenovú hladinu. Potom prostredníctvom zmeny ponuky peňazí môže centrálna banka vykonávať monetárnu politiku, ktorá sa bude prejavovať prostredníctvom zmien $\frac{M}{P}$.

Homogénna rovnica a charakteristický polynóm k tejto sú totožné s tými z predošlého modelu. Vlastnosti riešenia homogénnej rovnice Y_h - monotónnosť a stabilitu - teda možno nájsť v podkapitole II.4.2 .

Partikulárne riešenie pre všeobecný tvar postupností $\{G(t)\}$ a $\{\frac{b}{h}\frac{M}{P}(t)\}$ môžeme nájsť napríklad použitím operátorovej metódy, ktorá je uvedená v [3]. Partikulárne riešenie pre konštatnú postupnosť $\{A_0\}$ nájdeme v tvare konštanty. Podľa Vety I.25 bude celkové partikulárne riešenie existovať ako súčet uvedených 3 riešení.

II.5.2 Možnosti hospodárskej politiky

Pokiaľ chceme iba zistiť vplyv fiškálnej a monetárnej politiky na určovanie hodnoty výstupu, ku ktorému realizovaný produkt v prípade asymptotickej stability homogénnej rovnice konverguje, možno tak urobiť veľmi jednoduchou úvahou.
Nech $G(t) = \bar{G}_1$ a $\frac{M}{P}(t) = \bar{M}_1$. Potom (dľa Vety I.24 a Vety I.25 a použitím koeficientu γ z predošlej podkapitoly) máme.

$$Y_p(t) = \gamma A_0 + \gamma \bar{G}_1 + \gamma \frac{b}{h} \bar{M}_1, \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.67}$$

Teda pomocou fiškálnej, alebo monetárnej politiky možno dosiahnúť ľubovoľnú úroveň riešenia Y_p. V skutočnosti pre príliš vysoké hodnoty vládnej spotreby, resp. ponuky peňazí, by nutne dochádzalo k prehrievaniu ekonomiky a zmenám cenovej hladiny, čím sa dostávame mimo oblasť pôsobnosti modelu.

II.5.3 Prispôsobenie sa hospodárskej politike

Pokiaľ chceme zistiť priebeh prispôsobenia sa zvolenej hospodárskej politike, môžeme opäť použiť jednoduchšiu metódu, ako zrátanie kvantitatívneho riešenia.
Nech do času t_0 bola ekonomika v rovnováhe pri $G(t) = \bar{G}_1$ a $\frac{M}{P}(t) = \bar{M}_1$.
V čase t_0 došlo k zmene $G(t) = \bar{G}_2$ a $\frac{M}{P}(t) = \bar{M}_2$.
Potom do času t_0 platilo

$$Y_1(t) = Y_{p,1}(t) = \gamma A_0 + \gamma \bar{G}_1 + \gamma \frac{b}{h} \bar{M}_1 \tag{II.68}$$

čím je presne určené riešenie $Y_1(t)$. Od času t_0 vrátane vyhovuje partikulárne riešenie

$$Y_{p,2}(t) = \gamma A_0 + \gamma \bar{G}_2 + \gamma \frac{b}{h} \bar{M}_2 \tag{II.69}$$

a celkové riešenie vyhovuje rovnici

$$Y_2(t_0) = Y_1(t_0) = Y_2(t_0) = Y_1(t_0 - 1) \tag{II.70}$$

t.j.

$$Y_{h,2}(t_0) = Y_{h,2}(t_0 - 1) = \gamma(\bar{G}_2 - \bar{G}_1) + \gamma \frac{b}{h} (\bar{M}_1 - \bar{M}_2) \tag{II.71}$$

Rovnice (II.71) presne určujú formou počiatočných podmienok homogénne riešenie a teda aj $Y_2(t)$ je presne určené.

Postupnosť $\left\{\tilde{Y}(t)\right\}$, ktorá vznikne zlepením riešenia $\{Y_1(t)\}$ do času t_0 a riešenia $\{Y_2(t)\}$ počínajúc časom t_0 rieši potom zadanie.
Odtiaľ je potom vidno, že z charakteru riešenia homogénnej rovnice k (II.66) vyplýva aj rýchlosť prispôsobenia, aj to, či bude monotónne, alebo bude dochádzať k cyklickému pohybu počas prispôsobovacieho procesu. V prípade nestability homogénnej rovnice je taktiež zjavné, že namiesto prispôsobenia bude dochádzať k čoraz väčším odchýlkam od nového bodu dlhodobej rovnováhy.

Zastavme sa ešte pri hodnote multiplikátoru γ. Ten udáva, o koľko sa zvýši rovnovážny výstup, keď dôjde k (ceteris paribus) zvýšeniu $G(t)$ o 1 . Jeho hodnota je $\gamma = \dfrac{1}{1 - c + \frac{bk}{h}}$, čo je menšia hodnota, ako v prípade keynesiánskeho dôchodkového multiplikátoru $\frac{1}{1-c}$, ktorý udával obdobnú informáciu v základnom modeli. Ono zníženie je spôsobené vytesňovaním investícií firiem kvôli zvýšeniu vládnej spotreby. Mechanizmus je potom podrobnejšie popísaný v časti II.4.3.

II.5.4 Stabilizačná hospodárska politika

Skúsme na najbližších riadkoch posúdiť na základe uvažovaného modelu možnosti proticyklickej politiky. Pri vykonávaní týchto môžeme odlíšiť 2 prístupy.
Jedným z nich sú diskrečné zásahy štátu a centrálnej banky, to znamená, že svoje konkrétne rozhodnutia vykonávajú na základe momentálneho posúdenia situácie. Z tvaru rovnice (II.66)

$$(1 + \frac{bk}{h})Y(t) - (c + \kappa)Y(t-1) + \kappa Y(t-2) = A_0 + G(t) + \frac{b}{h}\frac{M}{P}(t)$$

je vidno, že v prípade vhodne zvolenej úrovne $G(t)$ a $\frac{M}{P}(t)$ je nožné presne "doladiť" hodnotu outputu v každom čase. Nevýhodou pre nás je ale to, že nemožno modelom vypočítať hodnoty outputu, keď nepoznáme hodnoty $G(t)$ a $\frac{M}{P}(t)$ pre každé $t \in \mathbb{N}$

Iným prístupom je sledovať pevné pravidlá, ktoré si inštitúcie vykonávajúce hospodársku politiku stanovia. V takomto prípade sú možnosti modelovania $Y(t)$ podstatne lepšie, aj keď nie každý systém pravidiel vedie k rovniciam nami sledovaným. Napriek tomu, existujú 2 jednoduché možnosti, ktoré sme schopní popísať.

Stanovme pravidlo

$$G(t) = \bar{G} - \omega(Y(t-1) - Y(t-2)), \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.72}$$

kde ω je zvolená konštanta. Vláda v takomto prípade reaguje na zmenu produktu pozorovanú v minulom období odchýlením svojej spotreby od jej dlhodobo rovnovážneho stavu. Hodnotu $\frac{M}{P}$ ponechajme fixovanú na $\bar{M}$. Potom rovnicu (II.66) upravíme na tvar

$$(1+\frac{bk}{h})Y(t)-(c+\kappa-\omega)Y(t-1)+(\kappa-\omega)Y(t-2)=A_0+\bar{G}+\bar{M} \quad \text{(II.73)}$$

Priamo z rovnice možno vidieť, že voľbou vhodného ω sme schopní potlačiť akúkoľvek nestabilitu modelu. Totiž použitím podmienok z Vety I.30 obdržíme

$$\chi(1)=1-\frac{c+\kappa-\omega}{1+\frac{bk}{h}}+\frac{\kappa-\omega}{1+\frac{bk}{h}}=1-\frac{c}{1+\frac{bk}{h}}>0$$

$$\chi(1)=1+\frac{c+\kappa-\omega}{1+\frac{bk}{h}}+\frac{\kappa-\omega}{1+\frac{bk}{h}}=\frac{1+\frac{bk}{h}+c+2\kappa-2\omega}{1+\frac{bk}{h}}>0$$

odkiaľ vidno, že prvá nerovnosť je splnená vždy, druhá je splnená pre $\omega<\frac{1+\frac{bk}{h}+c+2\kappa}{1+\frac{bk}{h}}=1+\frac{c+2\kappa}{1+\frac{bk}{h}}$. Nakoniec, z podmienky

$$\frac{\kappa-\omega}{1+\frac{bk}{h}}<1$$

je vidno, že priradením $\omega=\kappa$ je možné zaručiť podľa Vety I.30 asymptotickú stabilitu homogénnej rovnice.

Diskriminant charakteristického polynómu k (II.73) je

$$D(\chi)=\frac{(c+\kappa-\omega)^2-4(\kappa-\omega)(1+\frac{bk}{h})}{\left(1+\frac{bk}{h}\right)^2} \quad \text{(II.74)}$$

Volením ω blízkeho ku κ dostávame, že korene χ sú reálne. Pokiaľ navyše $\omega<c+\kappa$, potom (podľa Tvrdenia I.32) je riešenie homogénnej rovnice ku (II.73) monotónne.

Ako vidno z krátkej analýzy, pokiaľ zvolíme ω blížiace sa ku κ, potláčame tým nestabilitu aj cyklickosť pohybu $Y_h(t)$. Výsledok nie je nijako prekvapivý, pretože takáto politika plne potláča volatilitu indukovaných investícií, ktorá plynie z akcelerátorového princípu - de facto totiž má akcelerátor v tomto type hospodárskej politiky hodnotu $\kappa-\omega$.

Inou možnosťou je stanoviť pravidlo

$$G(t)=G(t-1)-\omega(Y(t-1)-Y(t-2)), \qquad t\in\mathbb{Z}\,, \quad \text{(II.75)}$$

kde ω je zvolená konštanta. Na rozdiel od predošlého prípadu teraz vláda koriguje svoju spotrebu z minulého obdobia na základe pozorovanej zmeny produktu. Tento tvar pre aplikovateľnosť mierne upravme.

$$\begin{aligned} G(t-1) &= G(t-2) - \omega(Y(t-2) - Y(t-3)) \\ &\vdots \\ G(2) &= G_1 - \omega(Y(1) - Y_0) \end{aligned} \tag{II.76}$$

Po sčítaní (II.75) a rovníc (II.76) dostávame

$$G(t) = G_1 + \omega Y_0 - \omega Y(t-1), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.77}$$

Keďže $G_1 + \omega Y_0$ je v čase t už konštanta, nahradením za G_0 získavame

$$G(t) = G_0 - \omega Y(t-1), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.78}$$

Dosadením poslednej rovnice do (II.66) a fixovaním ponuky peňazí obdržíme

$$(1+\frac{bk}{h})Y(t) - (c+\kappa-\omega)Y(t-1) + \kappa Y(t-2) = A_0 + G(t) + \frac{b}{h}\frac{M}{P}(t) \tag{II.79}$$

Obdobná analýza, ako v predošlom prípade ukazuje, že kľúčová podmienka stability, $\kappa < 1 + \frac{bk}{h}$ ostáva nezmenená v porovnaní s prípadom bez pôsobenia stabilizačnej politiky. Pokiaľ je táto splnená a navyše $\omega \in (c - 1 - \frac{bk}{h}\ ,\ 1 + \frac{bk}{h} + c + 2\kappa)$, potom nedochádza k nestabilite homogénnej rovnice.

Diskriminant charakteristického polynómu je

$$D(\chi) = \frac{(c+\kappa-\omega)^2 - 4\kappa(1+\frac{bk}{h})}{\left(1+\frac{bk}{h}\right)^2} \tag{II.80}$$

odkiaľ plynie, že pre hodnoty $\omega \in (0\ ,\ 2(c+\kappa))$ je diskriminant charakteristického polynómu nižší, než diskriminant polynómu prípadu bez aktívnej hospodárskej politiky.

Taktiež pre $\omega > c + \kappa$ dochádza v prípade reálnych koreňov $\chi(\lambda)$ k nepravidelným osciláciám, keďže λ_1 aj λ_2 budú záporné.

Pre dostatočne malé, trochu paradoxne záporné hodnoty ω tak vychádza možnosť do istej miery brániť cyklickému chovaniu ekonomiky

Pokiaľ by sme uvažovali možnosti monetárnej politiky na obdobné ciele, modifikáciou (II.72)

$$\frac{M}{P}(t) = \bar{M} - \omega(Y(t-1) - Y(t-2)), \qquad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{II.81}$$

respektíve (II.78)

$$\frac{M}{P}(t) = \left(\frac{M}{P}\right)_0 - \omega Y(t-1), \qquad t \in \mathbb{Z} \tag{II.82}$$

a fixovaním úrovne vládnych výdavkov dochádzame k obdobným výsledkom. Jediný rozdiel bude, že podmienku postupne kladené na ω treba vztiahnuť tentokrát na $\frac{b}{h}\omega$

II.6 Vzťah investícií a dôchodku

Jednou z predností modelov multiplikátoru-akcelerátoru je, že umožňujú sledovať nielen vývoj agregovaného dôchodku, ale aj jeho jednotlivých zložiek. To nám umožňuje určiť aj konkrétny vzťah týchto zložiek k dôchodku.
V prípade spotreby a dôchodku je táto relácia pomerne jednoduchá a je v rovnici (II.2) zavedená ako spotrebná funkcia dôchodku: $C(t) = cY(t-1)$

Vzťah investičných výdavkov a dôchodku už z tvaru základného modelu (II.7) tak zrejmý nie je. Empirické poznatky ukazujú, že v priebehu hospodárskeho cyklu predbieha vývoj investícii vývoju produktu. Pozrime sa teda, či takýto vzťah možno pozorovať aj v našom najjednoduchšom modeli.

Základ nám poskytuje kvantitatívna analýza, v ktorej sme určili dôchodok rovnicou

$$Y(t) = \frac{A_0}{1-c} + B|\lambda|^t \cos(\nu t + \epsilon), \qquad B \geq 0,\ \epsilon \in < 0\ ,\ 2\pi),\ t \in \mathbb{Z} \quad \text{(II.83)}$$

(predpokladáme, že charakteristický polynóm má komplexné korene; opačný predpoklad by totiž viedol k necyklickému typu vývoja)
V našej dvojsektorovej ekonomike sú potom investície dané ako

$$I(t) = Y(t) - C(t), \qquad t \in \mathbb{Z}$$

Upravujeme:

$$\begin{aligned}
I(t) &= Y(t) - cY(t-1) = \\
&= \frac{A_0}{1-c} + B|\lambda|^t \cos(\nu t + \epsilon) - c\frac{A_0}{1-c} - c.B|\lambda|^{t-1}\cos(\nu t + \epsilon - \nu) = \\
&= A_0 + B|\lambda|^t \left[\cos(\nu t + \epsilon) - \frac{c}{|\lambda|}\cos(\nu t + \epsilon - \nu)\right] = \\
&= A_0 + B|\lambda|^t \left[\cos\left(\nu t + \epsilon - \frac{\nu}{2} + \frac{\nu}{2}\right) - \frac{c}{|\lambda|}\cos\left(\nu t + \epsilon - \frac{\nu}{2} - \frac{\nu}{2}\right)\right] = \\
&= A_0 + B|\lambda|^t \Bigg[\cos\left(\nu t + \epsilon - \frac{\nu}{2}\right).\cos\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right) - \\
&\quad - \sin\left(\nu t + \epsilon - \frac{\nu}{2}\right).\sin\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1 + \frac{c}{|\lambda|}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

Výrazy $\cos\frac{\nu}{2}\left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right)$ a $\sin\frac{\nu}{2}\left(1 + \frac{c}{|\lambda|}\right)$ môžeme upraviť na tvary $m.\cos\mu$, resp. $m.\sin\mu$, kde $m = \sqrt{\cos^2\frac{\nu}{2}\left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right)^2 + \sin^2\frac{\nu}{2}\left(1 + \frac{c}{|\lambda|}\right)^2}$ a μ je uhol s príslušnou veľkosťou. Dostávame

$$I(t) = A_0 + B|\lambda|^t \left[\cos\left(\nu t + \epsilon - \frac{\nu}{2}\right).m\cos\mu - \sin\left(\nu t + \epsilon - \frac{\nu}{2}\right).m\sin\mu\right] =$$
$$= A_0 + mB|\lambda|^t \cos\left(\nu t + \epsilon - \frac{\nu}{2} + \mu\right)$$

Pozrime sa bližšie na hodnoty a vzájomný vzťah uhlov $\frac{\nu}{2}$ a μ:
Keďže $\nu \in (0\ ,\ \frac{\pi}{2})$ (to vyplýva z toho, že ν je argumentom čísla $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(c + \kappa + \sqrt{(c+\kappa)^2 - 4\kappa}\right)$, ktorého reálna aj imaginárna zložka sú kladné), potom $\frac{\nu}{2} \in (0\ ,\ \frac{\pi}{4})$
Vieme taktiež, že $\sin\mu = \sin\frac{\nu}{2}(1 + \frac{c}{|\lambda|})$, a teda $\sin\mu > 0$. Z toho môžeme určiť, že $\mu \in (0, \pi)$.
Zároveň platí, že $\mu > \frac{\mu}{2}$. Totiž, pokiaľ $\mu \in < \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi)$, nerovnosť je zrejmá. Pokiaľ $\mu \in (0\ ,\ \frac{\pi}{2})$, potom platí, že $\mu > \frac{\nu}{2}$ práve vtedy, keď $\tan\mu > \tan\frac{\nu}{2}$ (pripomeňme, že $\frac{\nu}{2} \in (0\ ,\ \frac{\pi}{4})$). Upravujme

$$\tan\mu = \frac{\sin\mu}{\cos\mu} = \frac{\sin\frac{\nu}{2}\left(1 + \frac{c}{|\lambda|}\right)}{\cos\frac{\nu}{2}\left(1 - \frac{c}{|\lambda|}\right)} = \tan\frac{\nu}{2}.\frac{1 + \frac{c}{|\lambda|}}{1 - \frac{c}{|\lambda|}} < \tan\frac{\nu}{2}$$

Platí teda, že $(\mu - \frac{\nu}{2}) \in (0, \pi)$
Môžeme teda písať, že

$$I(t) = A_0 + mB|\lambda|^t \cos(\nu t + \epsilon + \beta)\ , \tag{II.84}$$

kde $\beta = \mu - \frac{\nu}{2}$

Porovnaním (II.84) s (II.83) možno usúdiť, že investičné výdaje majú (pochopiteľne, vzhľadom na existenciu multiplikátoru) nižšiu rovnovážnu hodnotu, amplitúda ich oscilácii je m-násobkom[5] amplitúdy oscilácie celkového dôchodku.
Zároveň platí, že oproti osciláciám produktu sú oscilácie investícií fázovo posunuté vpred o β - teda aj v našom uvažovanom modeli predbieha vývoj investícií neskorší vývoj produktu, čo predstavuje istú kladnú črtu tohto modelu.

Obdobným postupom by sa dalo obhájiť toto tvrdenie aj v prípade modelu s rastúcim trendom, ako aj v tých modifikáciách, kde nedochádza k osciláciám s periódou 2.

[5] Dá sa dokázať, že $m \in (0, 1)$

Kapitola III

Model DAD-DAS

III.1 Zostrojenie modelu

V 70. rokoch sa do popredia záujmu makroekonómie dostal problém inflácie, čo viedlo aj k potrebe vybudovať modely, ktoré by dávali do súvislosti dosiahnutý produkt a infláciu. Jeden z týchto je aj model dynamického agregátneho dopytu a dynamickej agregátnej ponuky (po anglicky dynamic aggregate demand - dynamic aggregate supply, odtiaľ skratka DAD-DAS), ktorý predstavuje istý spôsob dynamizácie známeho modelu AS-AD. Model je dnes uvádzaný v štandardných učebniciach pre kurzy makroekonómie, v tejto kapitole čerpáme predovšetkým z diel [1] a [2].

Zostrojenie modelu sa skladá z troch samostatných častí:

(i) určenie krivky DAS, ktorá ukazuje, ceteris paribus, agregátnu ponuku v ekonomike v závislosti od inflácie v bežnom období

(ii) určenie krivky DAD, ktorá obdobne určuje celkový dopyt na trhu

(iii) stanovenie tvorby inflačných očakávaní

Zložením týchto 3 častí dostávame nakoniec ucelený model DAD-DAS.

III.1.1 Krivka DAS

Základom odvodzovania krivky DAS je Friedman-Phelpsova verzia Phillipsovej krivky, ktorá určuje trade-off medzi nezamestnanosťou a infláciou v závislosti od očakávanej miery inflácie v čase t:

$$\pi(t) = \pi^e(t) + u(U^* - U(t)), \quad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{III.1}$$

kde $\pi(t)$ a $\pi^e(t)$ sú pozorovaná, resp. očakávaná miera inflácie v čase t, $U(t)$ je miera nezamestnanosti v t, U^* je prirodzená miera nezamestnenosti (teda taká, ktorá nezrýchľuje mzdovú infláciu) a u je dané reálne číslo.

Pokiaľ predpokladáme afinný vzťah medzi outputom a nezamestnanosťou v tvare

$$Y(t) = W - w.U(t), \quad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{III.2}$$

kde $Y(t)$ je produkt (output, dôchodok) v t a W aj w sú kladné reálne konštanty, potom môžeme prepísať (III.1) do tvaru

$$\pi(t) = \pi^e(t) + \frac{1}{\vartheta}(Y(t) - Y^*), \quad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{III.3}$$

kde ϑ je kladná konštanta a $Y^* = W - w.U^*$ je prirodzená hladina produktu.

Rovnicu (III.3) budeme naďalej uvádzať ako krivku DAS, pričom v čase t budeme považovať $\pi^e(t)$ za dané.

III.1.2 Krivka DAD

Krivka DAD má všeobecný tvar

$$Y(t) = Y(t-1) + \gamma\Delta A(t) + \mu(m(t) - \pi(t)) + \rho\Delta\pi^e(t), \quad t \in \mathbb{Z}\,, \tag{III.4}$$

kde $\gamma, \mu, \rho \in (0, +\infty)$ sú dané konštanty. $A(t)$ označuje autonómnu spotrebu v čase t, $m(t)$ označuje mieru rastu nominálneho objemu peňazí.
(Symbol Δ označuje operátor diferencie, ktorý sme zaviedli v Príklade I.13 .)

Pre prípad uzavretej ekonomiky môžeme krivku DAD odvodiť istým zovšeobecnením modelu IS-LM. V tomto modeli má krivka IS tvar

$$Y(t) = \alpha(A(t) - b.r(t))\,, \tag{III.5}$$

kde $A(t)$ predstavuje výšku autonómnych výdavkov (vládnych, investičných aj spotrebných dohromady), $r(t)$ je úroveň reálnej úrokovej miery pozorovanej v t a b je kladná konštanta. Parameter α je keynesiánsky dôchodkový multiplikátor; $\alpha = \frac{1}{1-c}$, kde c je konštantný hraničný sklon k spotrebe z dôchodku.

Krivka LM má tvar

$$\frac{M}{P}(t) = kY(t) - hi(t) \tag{III.6}$$

$\frac{M}{P}(t)$ je objem tzv. reálnych zostatkov, index, ktorý dostaneme vydelením objemu menovej zásoby cenovou hladinou. $i(t)$ je nominálna úroková miera v t a h, k sú kladné konštanty.

Spojením (III.5) a (III.6) dostávame vzťah pre realizovaný output v t:

$$Y(t) = \gamma\left(A(t) + \frac{b}{h}\frac{M}{P}(t) + b(i(t) - r(t))\right) \tag{III.7}$$

Parameter γ v (III.7) je tzv. multiplikátor fiškálnej politiky, platí $\gamma = \frac{1}{1-c+\frac{bk}{h}}$[1].

Použitím Fisherovho vzťahu pre nominálnu úrokovú mieru $i(t) = r(t) + \pi^e(t)$ upravíme (III.7) na tvar

$$Y(t) = \gamma\left(A(t) + \frac{b}{h}\frac{M}{P}(t) + b\pi^e(t)\right) \tag{III.8}$$

Diferenciou oboch strán rovnice (III.8) dostávame

$$\Delta Y(t) = \gamma\Delta A(t) + \gamma\frac{b}{h}\Delta\frac{M}{P}(t) + \gamma b\Delta\pi^e(t) \tag{III.9}$$

$\frac{M}{P}(t)$ môžeme vyjadriť ako $\frac{M}{P}(t-1)(1+m(t)-\pi(t))$, kde m(t) predstavuje mieru rastu nominálnej peňažnej zásoby (a inflácia samozrejme mieru rastu cenovej hladiny P). Teda platí aj, že $\Delta\frac{M}{P}(t) = \frac{M}{P}(t-1)(m(t)-\pi(t))$. Za dodatočnej hypotézy, že zmena reálnych zostatkov $\frac{M}{P}$ medzi ľubovoľnými dvoma časovými obdobiami je rádovo menšia než hodnota $\frac{M}{P}$ v ľubovoľnom z týchto časov, môžeme písať $\Delta\frac{M}{P}(t) = \frac{M}{P}(0)(m(t)-\pi(t))$. Ďalej, keďže $\frac{M}{P}(0)$ predstavuje indexovanú hodnotu, môžeme vhodnou zmenou koeficientov h a k (ten vstupuje do rovnice (III.9) prostredníctvom multiplikátoru γ) nanormovať $\frac{M}{P}(0)$ na 1. Aplikovaním týchto vzťahov do rovnice (III.9) obdržíme

$$Y(t) = \gamma\Delta A(t) + \gamma\frac{b}{h}(m(t)-\pi(t)) + \gamma b\Delta\pi^e(t), \quad t \in \mathbb{Z} \tag{III.10}$$

Drobnou úpravou a zjednodušením zápisu potom obdržíme rovnicu (III.4):

$$Y(t) = Y(t-1) + \gamma\Delta A(t) + \mu(m(t)-\pi(t)) + \rho\Delta\pi^e(t), \quad t \in \mathbb{Z}\,,$$

kde $\mu = \frac{\gamma b}{h}$ a $\rho = \gamma b$

V prípade otvorenej ekonomiky nemožno odvodiť tvar krivky DAD priamo z modelu IS-LM, ale z niektorej z jeho modifikácií (napr. modelu IS-LM-BP, ako je graficky znázornené v [1]).

III.1.3 Inflačné očakávania

Nakoniec si určíme tvar inflačných očakávaní. Jedna z najjednoduchších možností je uvažovať statické očakávania, teda také, kedy inflácia v t sa očakáva na rovankej úrovni, akú dosiahla inflácia v čase $t-1$:

$$\pi^e(t) = \pi(t-1) \qquad , \quad t \in \mathbb{Z} \tag{III.11}$$

Tento typ očakávaní, ako čoskoro uvidíme, zároveň vedie k (z pohľadu tejto práce) vhodnému tvaru celkového modelu DAD-DAS.

[1]Bližšia diskusia o γ a α je v kapitole II.4.3 na strane 34. Všimnime si na tomto mieste (nie náhodnú) podobnosť s tou modifikáciou modelu multiplikátoru-akcelerátoru, ktorú sme používali v kap. II.5, ktorá taktiež predstavuje možnú dynamizáciu modelu IS-LM

III.1.4 Celkový model

Celkový model DAD-DAS pri nami uvažovanej tvorbe inflačných očakávaní je vyjadrený rovnicami

$$\pi(t) = \pi(t-1) + \frac{1}{\vartheta}(Y(t) - Y^*), \qquad t \in \mathbb{Z} \quad \text{(III.12)}$$

$$Y(t) = Y(t-1) + \gamma\Delta A(t) + \mu(m(t) - \pi(t)) + \rho\Delta\pi(t-1), \quad t \in \mathbb{Z} \quad \text{(III.13)}$$

Pri hľadaní vzťahu, vyjadrujúcemu bod vyrovnania na trhoch pre ľubovoľný čas t, sa ako najvhodnejším ukazuje byť zostrojenie rovnice, kde neznámou bude postupnosť mier inflácie $\{\pi(t)\}$. Postupovať možno nasledovne:
rovnicu (III.12) prepíšeme do tvaru

$$Y(t) = Y^* + \vartheta\pi(t) - \vartheta\pi(t-1) \qquad \text{(III.14)}$$

Dosadením $Y(t)$ z (III.14) do (III.13) obdržíme

$$(\vartheta + \mu)\pi(t) - (2\vartheta + \rho)\pi(t-1) + (\vartheta + \rho)\pi(t-2) = \gamma\Delta G(t) + \mu m(t), \quad t \in \mathbb{Z} \qquad \text{(III.15)}$$

Rovnica (III.15) určuje vývoj inflácie čase a zhŕňa tak celý model. Pokiaľ by sme chcel určiť vývoj produktu v čase, môžeme tak urobiť zrátaním presného tvaru $\pi(t)$ a dosadením $\Delta\pi(t)$ do (III.14).

III.2 Analýza modelu

Pri analýze rovnice (III.15) sa, podobne ako vo väčšine prípadov minulej kapitoly, obmedzíme na určenie (významného) partikulárneho riešenia a kvalitatívnu analýzu homogénnej rovnice, keďže sme schopní týmto spôsobom určiť všetky dôležité charakteristiky modelu.

III.2.1 Kvalitatívna analýza homogénnej rovnice

Homogénna rovnica k (III.15) má tvar

$$\pi(t) - \frac{2\vartheta + \rho}{\vartheta + \mu}\pi(t-1) + \frac{\vartheta + \rho}{\vartheta + \mu}\pi(t-2) = 0, \qquad t \in \mathbb{Z}, \qquad \text{(III.16)}$$

charakteristický polynóm je potom určený ako

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2\vartheta + \rho}{\vartheta + \mu}\lambda + \frac{\vartheta + \rho}{\vartheta + \mu} \qquad \text{(III.17)}$$

Povahu koreňov $\chi(\lambda)$ zistíme pomocou diskriminantu polynómu χ

$$D(\chi) = \left(\frac{2\vartheta + \rho}{\vartheta + \mu}\right)^2 - 4\,\frac{\vartheta + \rho}{\vartheta + \mu}$$

úpravou ktorého obdržíme

$$D(\chi) = \frac{\rho^2 - 4\rho\mu - 4\vartheta\mu}{(\vartheta + \mu)^2} \tag{III.18}$$

Komplexné korene λ_1, λ_2 polynómu χ vychádzajú, pokiaľ

$$\rho^2 - 4\rho\mu - 4\vartheta\mu < 0$$

Posledná nerovnosť je splnená, pokiaľ $\rho \in \left(2\mu - 2\sqrt{\mu^2 + \vartheta\mu}\,,\ 2\mu + 2\sqrt{\mu^2 + \vartheta\mu}\right)$. Zároveň ale vieme, že $\rho > 0$. Z toho vyplýva, že komplexné korene dostávame, pokiaľ je splnená nerovnosť

$$\rho < 2\mu + 2\sqrt{\mu^2 + \vartheta\mu} \tag{III.19}$$

keďže $2\mu - 2\sqrt{\mu^2 + \vartheta\mu} < 0$

Znalosť povahy koreňov χ nám umožňuje previesť analýzu monotónnosti riešenia homogénnej rovnice. V prípade komplexných koreňov je riešenie $\pi_h(t)$ (dľa Tvrdenia I.31) oscilačného charakteru s periódou $\frac{2\pi}{\nu}$, kde ν je argumentom koreňa χ s kladnou imaginárnou časťou. Inými slovami, dochádza k cyklickým pohybom vo vývoji inflácie.

V prípade reálnych koreňov možno kvôli tvaru (III.15) použiť Tvrdenie I.32 , podľa ktorého platí, že každé riešenie homogénnej rovniceje od istého času t_0 monotónne.

Stabilitu homogénnej rovnice (III.16) posúdime podľa Vety I.30 . Podmienky asymptotickej stability majú tvar

$$\begin{aligned} \chi(1) &> 0 \\ \chi(-1) &> 0 \\ \frac{\vartheta + \rho}{\vartheta + \mu} &< 1 \end{aligned} \tag{III.20}$$

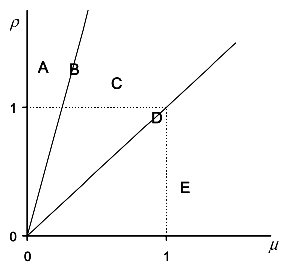
Jednoduchým dosadením do rovnice charakteristického polynómu (III.17) sa presvedčíme, že prvé dve nerovnosti sú splnené vždy.
Nutnou a postačujúcou podmienkou asymptotickej stability je potom nerovnosť (III.20), ktorú upravíme do tvaru

$$\rho < \mu \tag{III.21}$$

Tento tvar umožňuje aj jednoduché ekonomické vyloženie stability v modeli. A síce, pokiaľ citlivosť dôchodku na zmenu miery očakávanej inflácie (koeficient ρ) je menšia než citlivosť na mieru zmeny reálnych zostatkov $\frac{M}{P}$ (t.j mieru zmeny objemu likvidity; koeficient μ), potom pri vychýlení z rovnovážneho[2] stavu bude ekonomika konvergovať k tomuto rovnovážnemu stavu.

Podľa poznámky k Vete I.30 taktiež platí, že pokiaľ nerovnosť (III.21) je splnená s opačným znamienkom, potom homogénna rovnica (III.16) je nestabilná, respektíve ak je (III.21) splnená ako rovnosť, potom je stabilná.

Zhrňme výsledky kvalitatívnej analýzy do nasledovného obrázku, ktorý ukazuje charakter riešenia (III.16) v závislosti na ρ a μ pre limitný prípad, kedy $\vartheta \to 0$ (Pre prípad väčšieho ϑ dochádza k rýchlejšiemu rastu krivky B).



Možno vysloviť nasledovné tvrdenia:
$[\mu, \rho] \in A \cup B \Rightarrow$ homogénna rovnica(III.16) je nestabilná, každé jej riešenie je od určitého t_0 monotónne
$[\mu, \rho] \in C \Rightarrow$ rovnica (III.16) je nestabilná, jej riešenia sú oscilačného charakteru (s konštantnou periódou a amplitúdou rastúcou v čase
$[\mu, \rho] \in D \Rightarrow$ rovnica (III.16) je stabilná, jej riešenia sú oscilačného charakteru (s konštantnou periódou aj amplitúdou
$[\mu, \rho] \in E \Rightarrow$ rovnica (III.16) je asymptoticky stabilná, jej riešenia sú oscilačného charakteru (s konštantnou periódou a amplitúdou klesajúcou v čase

III.2.2 Hľadanie partikulárneho riešenia

Partikulárne riešenie závisí od tvaru postupnosti $\{\gamma\Delta A(t) + \mu m(t)\}$. Člen $\mu m(t)$ reprezentuje dopad rastu nominálneho objemu peňažnej zásoby, člen $\gamma\Delta A(t)$ potom dopad zmeny autonómnych výdavkov.

Najjednoduchší tvar postupnosti pravej strany (III.15) vychádza v prípade, že $A(t)$, ako aj $m(t)$ sú v čase konštantné, teda $\forall t \in \mathbb{Z} : (A(t) =$

[2]Za rovnovážne riešenie pokladáme také riešenie, v ktorom $\Delta Y(t) = \Delta\pi(t) = 0$. Bližšie o ňom budeme hovoriť v nasledujúcich podkapitolách

$\bar{A}) \wedge (m(t) = \bar{m})$. Partikulárne riešenie vtedy nájdeme v tvare konštanty, podľa Vety I.24 platí

$$\pi_p(t) = \frac{\bar{m}}{\mu + \vartheta - 2\vartheta - \rho + \vartheta + \rho}$$
$$\pi_p(t) = \bar{m} \tag{III.22}$$

Pokiaľ chceme určiť vývoj $Y(t)$ pozdĺž nájdeného riešenia rovnice (III.15), urobíme tak dosadením (III.22) do (III.14), vychádza

$$Y(t) = Y^* + \vartheta\bar{m} - \vartheta\bar{m}$$
$$Y(t) = Y^*$$

Teda hodnota dosahovaného produktu je rovná prirodzenému produktu.

Všimnime si, že v takto určenom partikulárnom riešení platí v ľubovoľnom čase t, že $\Delta\pi(t) = \Delta Y(t) = 0$. Riešenie tak predstavuje stav dlhodobej rovnováhy produktu, kedy nedochádza ani k výkyvom outputu, ani k zmene inflácie.

III.3 Prispôsobenie sa v modeli

III.3.1 Možnosti hospodárskej politiky

Ako je z tvaru rovnice (III.15) zrejmé, možnosť monetárnej politky sa otvára prostredníctvom pôsobenia na člen $m(t)$. Fiškálna politka bude pôsobiť na zmenu autonómnych výdavkov $A(t)$. Pre jednoduchosť ďalšieho výkladu prijmime predpoklad, že autonómna spotreba i autonómne investície sú konštantné[3], jedinou zložkou $\Delta A(t)$ je potom zmena vládnych výdavkov $\Delta G(t)$. Môžeme teda písať $\Delta A(t) \equiv \Delta G(t)$.

Predpokladajme, že do určitého času t_0 bol rast menovej zásoby rovný hodnote m_1 a nedochádzalo k zmene výdavkov štátu. Počínajúc časom t_0 došlo k zmene monetárnej expanzie, kedy $\forall t \geq t_0 : m(t) = m_2$ a vládne výdavky sa zvýšili o $\bar{G}$.

Partikulárne riešenie v takomto prípade postupnosti pravej strany budeme hľadať tak, že nájdeme osobitne partikulárne riešenie pre postupnosť $\{m_1\}$, osobitne pre postupnosť $\{m(t) - m_1\}$ a osobitne pre postupnosť $\{\Delta G(t)\}$. Výsledné partikulárne riešenie rovnice (III.15) bude podľa Vety I.25 súčtom uvedených troch postupností.

Partikulárne riešenie pre postupnosť pravej strany v tvare $\{m_1\}$ je uvedené

[3]Samozrejme, tento predpoklad môžeme jednoducho napadnúť prijatím hypotézy akcelerátorovej tvorby investícií. Bolo by možné dokonca spojiť modely akcelerátoru-multiplikátoru a DAD-DAS. Táto syntéza ale vedie nakoniec k diferenčným rovniciam vyšších rádov, čím prekračuje vymedzenie tejto práce.

predošlej kapitole. Riešenie pre zvyšné dve postupnosti môžeme nájsť prostredníctvom operátorovej metódy, uvádzanej v [3].

Pokiaľ chceme určiť charakter prispôsobenia ekonomiky na zmenu hospodárskej poliky, návod nám poskytne nasledujúca úvaha:
Zmena vládnych výdavkov nastala iba v čase t_0, z toho plynie $\forall t \geq t_0 + 1\ :$ $\Delta G(t) = 0$ Do času $t_0 + 1$ teda uvažujme riešenie π_1 rovnice (III.15) s nami uvažovanou pravou stranou. Počínajúc $t_0 + 1$ vyhovuje riešenie, pre ktoré platí

$$\begin{aligned} \pi_{p;2}(t) &= m_2 \\ \pi_2(t_0) &= \pi_1(t_0) \\ \pi_2(t_0 - 1) &= \pi_1(t_0 - 1) \end{aligned}$$

Poslédné dve rovnice udávajú konkrétny tvar riešenia homogénnej rovnice pre Y_2, preto je Y_2 jednoznačne určené. Riešenie $Y(t)$ platné v ľubovoľnom čase t získame zlepením riešenia Y_1 do času $t_0 + 1$ a Y_2 počínajúc časom $t_0 + 1$.

Z toho plynie, že pokiaľ je nulové riešenie homogénnej rovnice (III.16) asymptoticky stabilné, dochádza s rastúcim časom ku konvergencii pozorovanej inflácie k hodnote m_2, ľahko sa môžeme presvedčiť, že $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = Y^*$.

Zároveň plynie týmto z modelu nemožnosť dlhdobo dosahovať fiškálnou, alebo monetárnou expanziou vyššiu hodnotu produktu $Y(t)$, než je jeho prirodzená hodnota Y^*. Neustála fiškálna expanzia nie je možná, vzhľadom na potrebu udržiať dlhodobo vyrovnaný rozpočet a neustálym zvyšovaním rastu objemu peňazí bude dochádzať k akcelerácii inflácie. V prípade fiškálnej politiky nie sme dokonca schopní dlhodobo ovplyvňovať ani infláciu.

III.3.2 Vzťah medzi infláciou a produktom

Záverom kapitoly si skúsme určiť vzťah medzi vývojom inflácie a produktu. Predpokladajme v tejto podkapitole, že nedochádza k zmenám rastu peňažnej zásoby, teda $m(t) = \bar{m}$, ani k zmenám autonómnych výdavkov.

Závislosť medzi vývojom inflácie $\Delta\pi(t)$ a hodnotami $\pi(t)$ a $Y(t)$ určuje krivka DAS (rovnica (III.12)), ktorú možno písať aj v tvare

$$\Delta\pi(t) = \frac{1}{\vartheta}(Y(t) - Y^*) \tag{III.23}$$

V prípade zisťovania obdobného vývoja produktu v závislosti na hodnotách $\pi(t)$ a $Y(t)$ upravme najprv krivku DAD do tvaru

$$\Delta Y(t) = \gamma\Delta A(t) + \mu(m(t) - \pi(t)) + \rho\Delta\pi(t-1) \tag{III.24}$$

do ktorého keď dosadíme za $\Delta\pi(t)$, tak máme

$$\begin{aligned} \Delta Y(t) &= \gamma\Delta A(t) + \mu(m(t) - \pi(t)) + \frac{\rho}{\vartheta}(Y(t-1) - Y^*) \\ \Delta Y(t) &= \gamma\Delta A(t) + \mu(m(t) - \pi(t)) + \frac{\rho}{\vartheta}(Y(t) - \Delta Y(t) - Y^*) \\ (1 + \frac{\rho}{\vartheta})\Delta Y(t) &= \gamma\Delta A(t) + \mu(m(t) - \pi(t)) + \frac{\rho}{\vartheta}(Y(t) - Y^*) \qquad \text{(III.25)} \end{aligned}$$

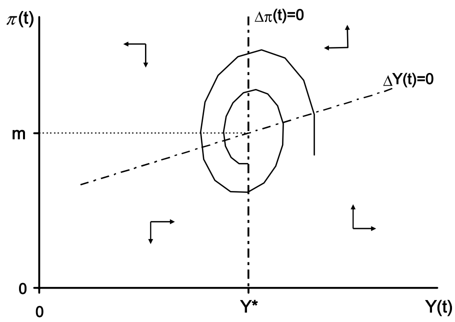
Položením $\Delta\pi(t) = 0$ obdržíme podmienku nemennosti inflácie v tvare

$$Y(t) = Y_*, \qquad t \in \mathbb{Z} \qquad \text{(III.26)}$$

Obdobnem položením $\Delta Y(t) = 0$ dostávam podmienku pre nemennosť $Y(t)$

$$\pi(t) = \bar{m} - \frac{\rho}{\mu\vartheta}Y^* + \frac{\rho}{\mu\vartheta}Y(t), \qquad t \in \mathbb{Z} \qquad \text{(III.27)}$$

Môžeme teda zostrojiť fázový diagram pre vývoj ekonomiky v závislosti na dosiahnutej hodnote $[Y(t); \pi(t)]$



Na tomto grafe možno ilustrovať niekoľko faktov. Jednak s rastom $\frac{\rho}{\mu}$ je sklon krivky $\Delta Y(t)$ väčší, dochádza tak k zhoršovaniu stability v modeli, ako vyplynulo už z kvalitatívnej analýzy. Ďalej ukazuje diagram spôsob, akým dochádza k prispôbeniu k rovnovážnemu stavu - pokiaľ fiškálna, alebo monetárna expanzia zvyšujú spočiatku produkt, dochádza postupom času k zvyšovaniu inflácie a poklesu produktu. Nakoniec dochádza k dezinflácii, kedy inflácia klesá, a produkt sa nachádza pod stavom svojej dlhodobej rovnováhy.

Záver

Na príklade dvoch modelov sme si ukázali možnosti využitia analýzy diferenčných rovníc v ekonomickom modelovaní. V základnom modeli multiplikátoru-akcelerátoru sme si ilustrovali spôsob, akým možno nájsť presný tvar riešenia uvedenej diferenčnej rovnice a teda aj spôsob ako numericky určiť vývoj systému v ľubovoľnom časovom úseku. Kvalitatívnou analýzou sme potom určili niektoré významné vlastnosti oboch modelov. Vyšetrenie monotónnosti ukázalo, že pre isté hodnoty koeficientov v modeloch dochádza v oboch modeloch k cyklickému vývoju v ekonomike. Taktiež sme kvalitatívnou analýzou presne určili podmienky asymptotickej stability rovnovážneho riešenia a ukazuje sa, že v oboch modeloch môžu nastať prípady, kedy dochádza k nestabilite vo vývoji ekonomického systému.

Zároveň sú možnosti kvalitatívnej analýzy lineárnych diferenčných rovníc využité na výpočetne jednoduché určenie zmeny vlastností modelu v prípade jeho pozmenenia. Taktiež v podkapitole II.4 sú týmto spôsobom porovnané dve možnosti zavedenia citlivosti produktu na úrokovú mieru.

Oba uvedené modely je možné samozrejme pozmeniť mnohými inými spôsobmi, než iba tými uvedenými v texte. Napríklad možnou zmenou modelu multiplikátoru-akcelerátoru by bolo zavedenie citlivosti na cenovú hladinu, model DAD-DAS je možné zjednodušiť predpokladom, že investície sa tvoria v závislosti na veľkosti nominálnej úrokovej miery (model s takýmto predpokladom sa uvažuje napríklad v [2]), pričom obe tieto zmeny môžu viesť k diferenčným rovniciam druhého rádu. Inou možnosťou, zmienenou aj v texte by bolo spojiť oba modely do jednoducho celku, čo by viedlo k rovnici 3. rádu; metódy vybudované v texte je možné ale s určitými drobnými zmenami použiť aj na analýzu rovníc vyšších rádov.

Literatúra

[1] Cahlík, T.: *Makroekonomie.* Karolinum, Praha, 1998

[2] Dornbusch, R., Fischer, S.: *Makroekonomie.* SPN, Praha, 1994

[3] Gandolfo, G.: *Economic Dynamics.* Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1997

[4] Hicks, J. R.: *A Contribution to the Theory of Trade Cycle.* Clarendon Press, Oxford, 1st edition, 1950

[5] John, O., Kalenda, O., Zelený, M.: *Matematika (pokračování).* Matfyzpress, Praha, 2003

[6] Samuelson, P. A.: Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration, *The Review of Economic Statistics*, Vol. 21, No. 2 (May, 1939), str. 75–78

[7] Smyth, D. J.: Monetary Factors and Multiplier-Accelerator Interaction, *Economica*, New Series, Vol. 30, No. 120 (Nov., 1963), str. 400–407